Teoria degli insiemi

Cos’è la teoria degli insiemi

La teoria degli insiemi è il fondamento della matematica.

Cos'è la teoria degli insiemi

La teoria degli insiemi è il fondamento della matematica.
Questa affermazione è singolare: la teoria degli insiemi ha cominciato a essere svilupata a partire dalla fine del XIX secolo; la matematica esisteva già da qualche millenio.

Il significato è:

Tutti i concetti matematici possono essere definiti in termini delle nozioni primitive di *insieme* e *appartenenza* da cui tutti i risultati matematici possono essere dedotti.

Da questa osservazione nasce la teoria degli insiemi.

Cos'è la teoria degli insiemi

Si potrebbe quindi anche dare la definizione

$$\textbf{matematica} = \textbf{teoria degli insiemi}$$

Cos'è la teoria degli insiemi

Si potrebbe quindi anche dare la definizione

matematica = teoria degli insiemi

L'identificaziona appare sensata, ma non si può escludere che in futuro debba essere soggetta a revisione.

Quale teoria degli insiemi?

Ci sono varie teorie degli insiemi, non tutte equivalenti fra loro — sebbene con larghe sovrapposizioni: hanno tutte l'ambizione di contenere la matematica ordinaria!

Quale teoria degli insiemi?

Ci sono varie teorie degli insiemi, non tutte equivalenti fra loro — sebbene con larghe sovrapposizioni: hanno tutte l'ambizione di contenere la matematica ordinaria!

La teoria chiamata usualmente *teoria degli insiemi* è la teoria *ZFC*: Zermelo-Fraenkel con assioma della scelta.

Quale teoria degli insiemi?

Ci sono varie teorie degli insiemi, non tutte equivalenti fra loro — sebbene con larghe sovrapposizioni: hanno tutte l'ambizione di contenere la matematica ordinaria!

La teoria chiamata usualmente *teoria degli insiemi* è la teoria *ZFC*: Zermelo-Fraenkel con assioma della scelta.

Nota: La teoria *ZFC* soddisfa le ipotesi dei teoremi di incompletezza.

Quale teoria degli insiemi?

Ci sono varie teorie degli insiemi, non tutte equivalenti fra loro — sebbene con larghe sovrapposizioni: hanno tutte l'ambizione di contenere la matematica ordinaria!

La teoria chiamata usualmente *teoria degli insiemi* è la teoria *ZFC*: Zermelo-Fraenkel con assioma della scelta.

Nota: La teoria *ZFC* soddisfa le ipotesi dei teoremi di incompletezza. Quindi, se è consistente, allora

- è incompleta
- non può dimostrare la propria consistenza

Gli assiomi di ZFC (primo blocco)

Il linguaggio della teoria degli insiemi consiste di un unico simbolo non logico: la relazione binaria di appartenenza $\in$.

Gli assiomi di ZFC (primo blocco)

Il linguaggio della teoria degli insiemi consiste di un unico simbolo non logico: la relazione binaria di appartenenza $\in$.

Primo blocco di assiomi:

1. Estensionalità: $\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$

Gli assiomi di ZFC (primo blocco)

Il linguaggio della teoria degli insiemi consiste di un unico simbolo non logico: la relazione binaria di appartenenza $\in$.

Primo blocco di assiomi:

1. Estensionalità: $\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$
2. Fondazione: $\exists x\ y \in x \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))$

Gli assiomi di ZFC (primo blocco)

Il linguaggio della teoria degli insiemi consiste di un unico simbolo non logico: la relazione binaria di appartenenza $\in$.

Primo blocco di assiomi:

1. Estensionalità: $\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$
2. Fondazione: $\exists x\ y \in x \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))$
3. Schema di separazione: Per ogni formula φ:
   $\exists y \forall x(x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge \varphi)$

Gli assiomi di ZFC (primo blocco)

Il linguaggio della teoria degli insiemi consiste di un unico simbolo non logico: la relazione binaria di appartenenza $\in$.

Primo blocco di assiomi:

1. Estensionalità: $\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$
2. Fondazione: $\exists x\ y \in x \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))$
3. Schema di separazione: Per ogni formula φ:
   $\exists y \forall x(x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge \varphi)$
4. Coppia: $\exists z(x \in z \wedge y \in z)$

Gli assiomi di ZFC (primo blocco)

Il linguaggio della teoria degli insiemi consiste di un unico simbolo non logico: la relazione binaria di appartenenza $\in$.

Primo blocco di assiomi:

1. Estensionalità: $\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$
2. Fondazione: $\exists x\ y \in x \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))$
3. Schema di separazione: Per ogni formula φ:
   $\exists y \forall x(x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge \varphi)$
4. Coppia: $\exists z(x \in z \wedge y \in z)$
5. Unione: $\exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in A)$

Gli assiomi di ZFC (primo blocco)

Il linguaggio della teoria degli insiemi consiste di un unico simbolo non logico: la relazione binaria di appartenenza $\in$.

Primo blocco di assiomi:

1. Estensionalità: $\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$
2. Fondazione: $\exists x\ y \in x \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))$
3. Schema di separazione: Per ogni formula φ:
   $\exists y \forall x(x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge \varphi)$
4. Coppia: $\exists z(x \in z \wedge y \in z)$
5. Unione: $\exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in A)$
6. Schema di rimpiazzamento: Per ogni formula φ:
   $\forall x \in A\ \exists! y \varphi \Rightarrow \exists Y \forall x \in A\ \exists y \in Y\ \varphi$

Gli assiomi di ZFC (primo blocco)

Il linguaggio della teoria degli insiemi consiste di un unico simbolo non logico: la relazione binaria di appartenenza $\in$.

Primo blocco di assiomi:

1. Estensionalità: $\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$
2. Fondazione: $\exists x\ y \in x \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))$
3. Schema di separazione: Per ogni formula φ:
   $\exists y \forall x(x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge \varphi)$
4. Coppia: $\exists z(x \in z \wedge y \in z)$
5. Unione: $\exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in A)$
6. Schema di rimpiazzamento: Per ogni formula φ:
   $\forall x \in A\ \exists! y \varphi \Rightarrow \exists Y \forall x \in A\ \exists y \in Y\ \varphi$

Gli assiomi 1–6 permettono di sviluppare le proprietà elementari della teoria degli insiemi. Questo facilita anche l'enunciazione degli assiomi restanti.

Primi sviluppi della teoria

Definizione.

- Insieme vuoto: $y = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \; x \notin y$

Primi sviluppi della teoria

Definizione.

- Insieme vuoto: $y = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \; x \notin y$
- Inclusione: $x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y)$

Primi sviluppi della teoria

Definizione.

- Insieme vuoto: $y = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \; x \notin y$
- Inclusione: $x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y)$
- Coppia ordinata: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Primi sviluppi della teoria

Definizione.

- Insieme vuoto: $y = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \; x \notin y$
- Inclusione: $x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y)$
- Coppia ordinata: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
- Comprensione: $y = \{z \in x \mid \varphi(z)\} \Leftrightarrow \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z))$

Primi sviluppi della teoria

Definizione.

- Insieme vuoto: $y = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \; x \notin y$
- Inclusione: $x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z(z \in x \Rightarrow z \in y)$
- Coppia ordinata: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
- Comprensione: $y = \{z \in x \mid \varphi(z)\} \Leftrightarrow \forall z(z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z))$
- Unione: $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{Y \in \mathcal{F}} Y = \{x \mid \exists Y \in \mathcal{F} \; x \in Y\}$

Primi sviluppi della teoria

Definizione.

- Insieme vuoto: $y = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \; x \notin y$
- Inclusione: $x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y)$
- Coppia ordinata: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
- Comprensione: $y = \{z \in x \mid \varphi(z)\} \Leftrightarrow \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z))$
- Unione: $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{Y \in \mathcal{F}} Y = \{x \mid \exists Y \in \mathcal{F} \; x \in Y\}$
- Prodotto cartesiano: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

Relazioni e funzioni

Definizione.

- R è una *relazione* se è un insieme di coppie ordinate

Relazioni e funzioni

Definizione.

- R è una *relazione* se è un insieme di coppie ordinate
- $domR = \{x \mid \exists y (x, y) \in R\}$

Relazioni e funzioni

Definizione.

- R è una *relazione* se è un insieme di coppie ordinate
- $domR = \{x \mid \exists y(x, y) \in R\}$
- f è una *funzione* se è una relazione e $\forall x \in domf \; \exists! y(x, y) \in f$. Tale y è denotato $f(x)$.

Relazioni e funzioni

Definizione.

- R è una *relazione* se è un insieme di coppie ordinate
- $domR = \{x \mid \exists y (x, y) \in R\}$
- f è una *funzione* se è una relazione e $\forall x \in domf\ \exists ! y (x, y) \in f$. Tale y è denotato $f(x)$. Se $domf = A$ e $f \subseteq A \times B$, si scrive $f : A \to B$.

Relazioni e funzioni

Definizione.

- R è una *relazione* se è un insieme di coppie ordinate
- $domR = \{x \mid \exists y (x, y) \in R\}$
- f è una *funzione* se è una relazione e $\forall x \in domf \ \exists! y (x, y) \in f$. Tale y è denotato $f(x)$. Se $domf = A$ e $f \subseteq A \times B$, si scrive $f : A \to B$. Una tale f è biiettiva se $\forall x, y \in A \ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$ e $\forall z \in B \ \exists x \in A \ f(x) = z$.

Relazioni e funzioni

Definizione.

- R è una *relazione* se è un insieme di coppie ordinate
- $domR = \{x \mid \exists y (x, y) \in R\}$
- f è una *funzione* se è una relazione e $\forall x \in domf \ \exists! y (x, y) \in f$. Tale y è denotato $f(x)$. Se $domf = A$ e $f \subseteq A \times B$, si scrive $f : A \to B$. Una tale f è biiettiva se $\forall x, y \in A \ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$ e $\forall z \in B \ \exists x \in A \ f(x) = z$.
- Se R, S sono relazioni, A, B sono insiemi ed $f : A \to B$, allora f è un isomorfismo tra (A, R) e (B, S) se f è biiettiva e $\forall x, y \in A \ (xRy \Leftrightarrow f(x) S f(y))$

Relazioni e funzioni

Definizione.

- R è una *relazione* se è un insieme di coppie ordinate
- $domR = \{x \mid \exists y (x, y) \in R\}$
- f è una *funzione* se è una relazione e $\forall x \in domf\ \exists! y (x, y) \in f$. Tale y è denotato $f(x)$. Se $domf = A$ e $f \subseteq A \times B$, si scrive $f : A \to B$. Una tale f è biiettiva se $\forall x, y \in A\ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$ e $\forall z \in B\ \exists x \in A\ f(x) = z$.
- Se R, S sono relazioni, A, B sono insiemi ed $f : A \to B$, allora f è un isomorfismo tra (A, R) e (B, S) se f è biiettiva e $\forall x, y \in A\ (xRy \Leftrightarrow f(x)Sf(y))$
- R è un *ordine* totale (stretto) su A se è *irriflessiva* ($\forall x \in A \neg xRx$), *transitiva* ($\forall x, y, z \in A\ (xRy \wedge yRz \to xRz)$) e totale ($\forall x, y \in A\ (x = y \vee xRy \vee yRx)$)

Relazioni e funzioni

Definizione.

- R è una *relazione* se è un insieme di coppie ordinate
- $domR = \{x \mid \exists y (x, y) \in R\}$
- f è una *funzione* se è una relazione e $\forall x \in domf \ \exists ! y (x, y) \in f$. Tale y è denotato $f(x)$. Se $domf = A$ e $f \subseteq A \times B$, si scrive $f : A \to B$. Una tale f è biiettiva se $\forall x, y \in A \ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$ e $\forall z \in B \ \exists x \in A \ f(x) = z$.
- Se R, S sono relazioni, A, B sono insiemi ed $f : A \to B$, allora f è un isomorfismo tra (A, R) e (B, S) se f è biiettiva e $\forall x, y \in A \ (xRy \Leftrightarrow f(x) S f(y))$
- R è un *ordine* totale (stretto) su A se è *irriflessiva* $(\forall x \in A \neg xRx)$, *transitiva* $(\forall x, y, z \in A \ (xRy \wedge yRz \to xRz))$ e totale $(\forall x, y \in A \ (x = y \vee xRy \vee yRx))$
- $\ldots$

Relazioni e funzioni

Definizione.

- R è una *relazione* se è un insieme di coppie ordinate
- $domR = \{x \mid \exists y (x, y) \in R\}$
- f è una *funzione* se è una relazione e $\forall x \in domf\ \exists! y (x, y) \in f$. Tale y è denotato $f(x)$. Se $domf = A$ e $f \subseteq A \times B$, si scrive $f : A \to B$. Una tale f è biiettiva se $\forall x, y \in A\ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$ e $\forall z \in B\ \exists x \in A\ f(x) = z$.
- Se R, S sono relazioni, A, B sono insiemi ed $f : A \to B$, allora f è un isomorfismo tra (A, R) e (B, S) se f è biiettiva e $\forall x, y \in A\ (xRy \Leftrightarrow f(x) S f(y))$
- R è un *ordine* totale (stretto) su A se è *irriflessiva* ($\forall x \in A \neg xRx$), *transitiva* ($\forall x, y, z \in A\ (xRy \wedge yRz \to xRz)$) e totale ($\forall x, y \in A\ (x = y \vee xRy \vee yRx)$)
- ...

Si può dunque in questo frammento di ZFC cominciare a sviluppare la matematica ordinaria (per garantire l'esistenza di altri enti importanti in matematica c'è bisogno degli altri assiomi). Ma **la teoria risulta abbastanza interessante da studiare per interesse indipendente**.

Buoni ordini

Un concetto importante in molte aree della matematica e fondamentale in teoria degli insiemi è quello di buon ordine.

Definizione. Una relazione d'ordine (A, R) è un *buon ordine* se ogni sottoinsieme non vuoto $B \subseteq A$ ha un elemento minimo rispetto a R.

Buoni ordini

Un concetto importante in molte aree della matematica e fondamentale in teoria degli insiemi è quello di buon ordine.

Definizione. Una relazione d'ordine (A, R) è un *buon ordine* se ogni sottoinsieme non vuoto $B \subseteq A$ ha un elemento minimo rispetto a R.

Lemma. Se (A, R) è un buon ordine e $a \in A$, allora (A, R) non è isomorfo al suo segmento iniziale $(\{x \in A \mid xRa\}, R)$.

Buoni ordini

Un concetto importante in molte aree della matematica e fondamentale in teoria degli insiemi è quello di buon ordine.

Definizione. Una relazione d'ordine (A, R) è un *buon ordine* se ogni sottoinsieme non vuoto $B \subseteq A$ ha un elemento minimo rispetto a R.

Lemma. Se (A, R) è un buon ordine e $a \in A$, allora (A, R) non è isomorfo al suo segmento iniziale $(\{x \in A \mid xRa\}, R)$.

Dimostrazione. Se $f : A \to \{x \in A \mid xRa\}$ è un isomorfismo, l'elemento $\min\{y \in A \mid f(y) \neq y\}$ produce una contraddizione.

Buoni ordini

Un concetto importante in molte aree della matematica e fondamentale in teoria degli insiemi è quello di buon ordine.

Definizione. Una relazione d'ordine (A, R) è un *buon ordine* se ogni sottoinsieme non vuoto $B \subseteq A$ ha un elemento minimo rispetto a R.

Lemma. Se (A, R) è un buon ordine e $a \in A$, allora (A, R) non è isomorfo al suo segmento iniziale $(\{x \in A \mid xRa\}, R)$.

Dimostrazione. Se $f : A \to \{x \in A \mid xRa\}$ è un isomorfismo, l'elemento $\min\{y \in A \mid f(y) \neq y\}$ produce una contraddizione.

Lemma. Se $(A, R), (B, S)$ sono buoni ordini isomorfi, l'isomorfismo tra loro è unico.

Dimostrazione. Se $f, g : A \to B$ sono isomorfismi, l'esistenza di $\min\{y \in A \mid f(y) \neq g(y)\}$ fornisce una contraddizione.

Buoni ordini

Teorema. Se $(A, R), (B, S)$ sono buoni ordini, vale esattamente una delle alternative seguenti:

1. $(A, R), (B, S)$ sono isomorfi
2. $(A, R), (\{y \in B \mid ySb\}, S)$ sono isomorfi, per qualche $b \in B$
3. $(\{x \in A \mid xRa\}, R), (B, S)$ sono isomorfi, per qualche $a \in A$

Buoni ordini

Teorema. Se $(A,R),(B,S)$ sono buoni ordini, vale esattamente una delle alternative seguenti:

1. $(A,R),(B,S)$ sono isomorfi
2. $(A,R),(\{y \in B \mid ySb\},S)$ sono isomorfi, per qualche $b \in B$
3. $(\{x \in A \mid xRa\},R),(B,S)$ sono isomorfi, per qualche $a \in A$

Dimostrazione. Sia

$$f = \{(a,b) \in A \times B \mid \{x \in A \mid xRa\} \simeq \{y \in B \mid ySb\}\}.$$

Allora f è un isomorfismo tra un segmento iniziale di A e un segmento iniziale di B, e non possono essere entrambi propri.

Ordinali

Definizione.

- Un insieme x è *transitivo* se ogni elemento di x è sottoinsieme di x: $\forall y \in x \; y \subseteq x$

Ordinali

Definizione.

- Un insieme x è *transitivo* se ogni elemento di x è sottoinsieme di x: $\forall y \in x \; y \subseteq x$
- x è un *numero ordinale* se è transitivo e la relazione $\in$ è un buon ordine su x

Ordinali

Definizione.

- Un insieme x è *transitivo* se ogni elemento di x è sottoinsieme di x: $\forall y \in x \; y \subseteq x$
- x è un *numero ordinale* se è transitivo e la relazione $\in$ è un buon ordine su x

Esempi d'ordinali (i numeri naturali)

- $0 = \emptyset$

Ordinali

Definizione.

- Un insieme x è *transitivo* se ogni elemento di x è sottoinsieme di x: $\forall y \in x \; y \subseteq x$
- x è un *numero ordinale* se è transitivo e la relazione $\in$ è un buon ordine su x

Esempi d'ordinali (i numeri naturali)

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{0\}$

Ordinali

Definizione.

- Un insieme x è *transitivo* se ogni elemento di x è sottoinsieme di x: $\forall y \in x \; y \subseteq x$
- x è un *numero ordinale* se è transitivo e la relazione $\in$ è un buon ordine su x

Esempi d'ordinali (i numeri naturali)

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{0\}$
- $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Ordinali

Definizione.

- Un insieme x è *transitivo* se ogni elemento di x è sottoinsieme di x: $\forall y \in x \; y \subseteq x$
- x è un *numero ordinale* se è transitivo e la relazione $\in$ è un buon ordine su x

Esempi d'ordinali (i numeri naturali)

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{0\}$
- $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Ordinali

Definizione.

- Un insieme x è *transitivo* se ogni elemento di x è sottoinsieme di x: $\forall y \in x \; y \subseteq x$
- x è un *numero ordinale* se è transitivo e la relazione $\in$ è un buon ordine su x

Esempi d'ordinali (i numeri naturali)

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{0\}$
- $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- $\ldots$

Con gli assiomi introdotti finora non si può dimostrare l'esistenza di altri ordinali.

Ordinali

Teorema.

1. Se x è un ordinale e $y \in x$, allora y è un ordinale e y è l'insieme dei $\in$-predecessori di se stesso in x

Ordinali

Teorema.

1. Se x è un ordinale e $y \in x$, allora y è un ordinale e y è l'insieme dei $\in$-predecessori di se stesso in x
2. Se x, y sono ordinali e $x \simeq y$, allora $x = y$

Ordinali

Teorema.

1. Se x è un ordinale e $y \in x$, allora y è un ordinale e y è l'insieme dei $\in$-predecessori di se stesso in x
2. Se x, y sono ordinali e $x \simeq y$, allora $x = y$
3. Se x, y sono ordinali, esattamente una delle seguenti alternative vale: $x \in y, x = y, y \in x$

Ordinali

Teorema.

1. Se x è un ordinale e $y \in x$, allora y è un ordinale e y è l'insieme dei $\in$-predecessori di se stesso in x
2. Se x, y sono ordinali e $x \simeq y$, allora $x = y$
3. Se x, y sono ordinali, esattamente una delle seguenti alternative vale: $x \in y, x = y, y \in x$
4. Se x, y, z sono ordinali e $x \in y, y \in z$, allora $x \in z$

Ordinali

Teorema.

1. Se x è un ordinale e $y \in x$, allora y è un ordinale e y è l'insieme dei $\in$-predecessori di se stesso in x
2. Se x, y sono ordinali e $x \simeq y$, allora $x = y$
3. Se x, y sono ordinali, esattamente una delle seguenti alternative vale: $x \in y, x = y, y \in x$
4. Se x, y, z sono ordinali e $x \in y, y \in z$, allora $x \in z$
5. Se C è un insieme non vuoto di ordinali, allora $\exists x \in C \ \forall y \in C \ (x = y \vee x \in y)$
6. Se φ è una formula soddisfatta da almeno un ordinale, allora c'è un minimo ordinale che la soddisfa

Dimostrazione. (5) Sia $x \in C$. Se $x \cap C = \emptyset$, allora x è $\in$-minimo in C. Altrimenti $\min(x \cap C) = \min C$.
(6) Simile a (5). Si esprime anche dicendo che ogni *classe* non vuota di ordinali ha un minimo.

Ordinali

Lemma. Se A è un insieme transitivo di ordinali, allora A è un ordinale.

Teorema. Se (A, R) è un buon ordine, allora c'è un unico ordinale C isomorfo a (A, R).

Ordinali

Lemma. Se A è un insieme transitivo di ordinali, allora A è un ordinale.

Teorema. Se (A, R) è un buon ordine, allora c'è un unico ordinale C isomorfo a (A, R).

Dimostrazione. (Esistenza) Siano

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{a \in A \mid \exists x \ (x \text{ è un ordinale e } \{b \in A \mid bRa\} \simeq x)\} \\ f(a) & = & \text{l'unico } x \text{ tale che } \{b \in A \mid bRa\} \simeq x. \end{array}$$

Ordinali

Lemma. Se A è un insieme transitivo di ordinali, allora A è un ordinale.

Teorema. Se (A, R) è un buon ordine, allora c'è un unico ordinale C isomorfo a (A, R).

Dimostrazione. (Esistenza) Siano

$$\begin{aligned} B &= \{a \in A \mid \exists x\ (x \text{ è un ordinale e } \{b \in A \mid bRa\} \simeq x)\} \\ f(a) &= \text{l'unico } x \text{ tale che } \{b \in A \mid bRa\} \simeq x. \end{aligned}$$

Se $C = imf$ è l'immagine di f, per il lemma precedente C è un ordinale e $f : B \to C$ è un isomorfismo. Se fosse $B \neq A$, sia $m = \min(A \setminus B)$. Allora $B = \{a \in A \mid aRm\}$, da cui $m \in B$, contraddizione.

Ordinali

Lemma. Se A è un insieme transitivo di ordinali, allora A è un ordinale.

Teorema. Se (A, R) è un buon ordine, allora c'è un unico ordinale C isomorfo a (A, R).

Dimostrazione. (Esistenza) Siano

$$\begin{aligned} B &= \{a \in A \mid \exists x\ (x \text{ è un ordinale e } \{b \in A \mid bRa\} \simeq x)\} \\ f(a) &= \text{l'unico } x \text{ tale che } \{b \in A \mid bRa\} \simeq x. \end{aligned}$$

Se $C = imf$ è l'immagine di f, per il lemma precedente C è un ordinale e $f : B \to C$ è un isomorfismo. Se fosse $B \neq A$, sia $m = \min(A \setminus B)$. Allora $B = \{a \in A \mid aRm\}$, da cui $m \in B$, contraddizione.

Gli ordinali sono dunque rappresentanti dei tipi d'ordine dei buoni ordini.

Ordinali

La relazione $\alpha \in \beta$ tra ordinali si scrive di solito $\alpha < \beta$.
$\alpha \leq \beta$ significa $\alpha = \beta \vee \alpha < \beta$.

Ordinali

La relazione $\alpha \in \beta$ tra ordinali si scrive di solito $\alpha < \beta$.
$\alpha \leq \beta$ significa $\alpha = \beta \vee \alpha < \beta$.

Lemma. Per ogni α, β ordinali, $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$.

Ordinali

La relazione $\alpha \in \beta$ tra ordinali si scrive di solito $\alpha < \beta$.
$\alpha \leq \beta$ significa $\alpha = \beta \vee \alpha < \beta$.

Lemma. Per ogni α, β ordinali, $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$.

Definizione. Il *successore* di un ordinale α è $S\alpha = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Ordinali

La relazione $\alpha \in \beta$ tra ordinali si scrive di solito $\alpha < \beta$.
$\alpha \leq \beta$ significa $\alpha = \beta \vee \alpha < \beta$.

Lemma. Per ogni α, β ordinali, $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$.

Definizione. Il *successore* di un ordinale α è $S\alpha = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Lemma. Per ogni ordinale α:

- $S(\alpha)$ è un ordinale

Ordinali

La relazione $\alpha \in \beta$ tra ordinali si scrive di solito $\alpha < \beta$.
$\alpha \leq \beta$ significa $\alpha = \beta \vee \alpha < \beta$.

Lemma. Per ogni α, β ordinali, $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$.

Definizione. Il *successore* di un ordinale α è $S\alpha = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Lemma. Per ogni ordinale α:

- $S(\alpha)$ è un ordinale
- $\alpha < S\alpha$

Ordinali

La relazione $\alpha \in \beta$ tra ordinali si scrive di solito $\alpha < \beta$.
$\alpha \leq \beta$ significa $\alpha = \beta \vee \alpha < \beta$.

Lemma. Per ogni α, β ordinali, $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$.

Definizione. Il *successore* di un ordinale α è $S\alpha = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Lemma. Per ogni ordinale α:

- $S(\alpha)$ è un ordinale
- $\alpha < S\alpha$
- $\forall \beta (\beta < S\alpha \Leftrightarrow \beta \leq \alpha)$

Ordinali

La relazione $\alpha \in \beta$ tra ordinali si scrive di solito $\alpha < \beta$.
$\alpha \leq \beta$ significa $\alpha = \beta \vee \alpha < \beta$.

Lemma. Per ogni α, β ordinali, $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$.

Definizione. Il *successore* di un ordinale α è $S\alpha = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Lemma. Per ogni ordinale α:

- $S(\alpha)$ è un ordinale
- $\alpha < S\alpha$
- $\forall \beta (\beta < S\alpha \Leftrightarrow \beta \leq \alpha)$

Inoltre, se X è un insieme non vuoto di ordinali, $\sup X = \bigcup X$.

Ordinali

Definizione. Un ordinale α è

- un *ordinale successore* se $\alpha = S\beta$ per qualche β

Ordinali

Definizione. Un ordinale α è

- un *ordinale successore* se $\alpha = S\beta$ per qualche β
- un *ordinale limite* se non è 0 nè un ordinale sucessore

Ordinali

Definizione. Un ordinale α è

- un *ordinale successore* se $\alpha = S\beta$ per qualche β
- un *ordinale limite* se non è 0 nè un ordinale sucessore

Definizione. α è un *numero naturale* se
$\forall \beta \leq \alpha \ (\beta = 0 \vee \beta$ è successore).

I naturali formano quindi un segmento iniziale degli ordinali.

Operazioni sugli ordinali

Si definiscono, per *induzione transfinita*, alcune operazioni sugli ordinali (che coincidono sui naturali con le corrispondenti operazioni aritmetiche):

Operazioni sugli ordinali

Si definiscono, per *induzione transfinita*, alcune operazioni sugli ordinali (che coincidono sui naturali con le corrispondenti operazioni aritmetiche):

Addizione.

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + S\beta = S(\alpha + \beta)$
- Se λ è un ordinale limite, $\alpha + \lambda = \sup\{\alpha + \beta \mid \beta < \lambda\}$

Operazioni sugli ordinali

Si definiscono, per *induzione transfinita*, alcune operazioni sugli ordinali (che coincidono sui naturali con le corrispondenti operazioni aritmetiche):

Addizione.

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + S\beta = S(\alpha + \beta)$
- Se λ è un ordinale limite, $\alpha + \lambda = \sup\{\alpha + \beta \mid \beta < \lambda\}$

$\alpha + \beta$ è il tipo d'ordine di un'unione disgiunta di un tipo d'ordine α con in coda un tipo d'ordine β.

Per esempio, $\alpha + 1 = S\alpha$.

Operazioni sugli ordinali

Moltiplicazione

- $\alpha 0 = 0$
- $\alpha S\beta = \alpha\beta + \alpha$
- Se λ è un ordinale limite, $\alpha\lambda = \sup\{\alpha\beta \mid \beta < \lambda\}$

Operazioni sugli ordinali

Moltiplicazione

- $\alpha 0 = 0$
- $\alpha S\beta = \alpha\beta + \alpha$
- Se λ è un ordinale limite, $\alpha\lambda = \sup\{\alpha\beta \mid \beta < \lambda\}$

$\alpha\beta$ è il tipo d'ordine di $\alpha \times \beta$ ordinato antilessicograficamente.

Operazioni sugli ordinali

Moltiplicazione

- $\alpha 0 = 0$
- $\alpha S\beta = \alpha\beta + \alpha$
- Se λ è un ordinale limite, $\alpha\lambda = \sup\{\alpha\beta \mid \beta < \lambda\}$

$\alpha\beta$ è il tipo d'ordine di $\alpha \times \beta$ ordinato antilessicograficamente.

Esponenziazione.

- $\alpha^0 = 1$
- $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \alpha$
- Se λ è un ordinale limite, $\alpha^\lambda = \sup\{\alpha^\beta \mid \beta < \lambda\}$

Gli assiomi di ZFC (secondo blocco)

7. Infinito: $\exists x (0 \in x \mid \forall y \in x \; Sy \in x)$

Gli assiomi di ZFC (secondo blocco)

7. Infinito: $\exists x(0 \in x \mid \forall y \in x \; Sy \in x)$
8. Potenza: $\exists y \forall z(z \subseteq x \Rightarrow z \in y)$

Gli assiomi di ZFC (secondo blocco)

7. Infinito: $\exists x(0 \in x \mid \forall y \in x\ Sy \in x)$
8. Potenza: $\exists y \forall z(z \subseteq x \Rightarrow z \in y)$
9. Scelta: $\exists f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}\ \forall X \in \mathcal{F}\ (X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \in X)$

Gli assiomi di ZFC (secondo blocco)

7. Infinito: $\exists x(0 \in x \mid \forall y \in x \; Sy \in x)$
8. Potenza: $\exists y \forall z(z \subseteq x \Rightarrow z \in y)$
9. Scelta: $\exists f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F} \; \forall X \in \mathcal{F} \; (X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \in X)$

L'assioma della scelta è equivalente al
Principio del buon ordinamento. Ogni insieme è bene ordinabile.

Gli assiomi di ZFC (secondo blocco)

7. Infinito: $\exists x(0 \in x \mid \forall y \in x \; Sy \in x)$
8. Potenza: $\exists y \forall z(z \subseteq x \Rightarrow z \in y)$
9. Scelta: $\exists f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F} \; \forall X \in \mathcal{F} \; (X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \in X)$

L'assioma della scelta è equivalente al
Principio del buon ordinamento. Ogni insieme è bene ordinabile.
Lemma di Zorn. Se A è un insieme (parzialmente) ordinato tale che ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato ha un maggiorante, allora A ha un elemento massimale.

Gli assiomi di ZFC (secondo blocco)

7. Infinito: $\exists x (0 \in x \mid \forall y \in x \; Sy \in x)$
8. Potenza: $\exists y \forall z (z \subseteq x \Rightarrow z \in y)$
9. Scelta: $\exists f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F} \; \forall X \in \mathcal{F} \; (X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \in X)$

L'assioma della scelta è equivalente al
Principio del buon ordinamento. Ogni insieme è bene ordinabile.
Lemma di Zorn. Se A è un insieme (parzialmente) ordinato tale che ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato ha un maggiorante, allora A ha un elemento massimale.

(Un *ordine parziale* $\leq$ è una relazione riflessiva: $\forall x \; x \leq x$; transitiva: $\forall x, y, z \; (x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$; antisimmetrica: $\forall x, y \; (x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$. È totale se $\forall x, y \; (x \leq y \vee y \leq x)$.)

Gli assiomi di ZFC (secondo blocco)

7. Infinito: $\exists x(0 \in x \mid \forall y \in x\ Sy \in x)$
8. Potenza: $\exists y \forall z(z \subseteq x \Rightarrow z \in y)$
9. Scelta: $\exists f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}\ \forall X \in \mathcal{F}\ (X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \in X)$

L'assioma della scelta è equivalente al
Principio del buon ordinamento. Ogni insieme è bene ordinabile.
Lemma di Zorn. Se A è un insieme (parzialmente) ordinato tale che ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato ha un maggiorante, allora A ha un elemento massimale.

(Un *ordine parziale* $\leq$ è una relazione riflessiva: $\forall x\ x \leq x$; transitiva: $\forall x, y, z\ (x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$; antisimmetrica: $\forall x, y\ (x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$. È totale se $\forall x, y\ (x \leq y \vee y \leq x)$.)

Definizione. L'insieme dei numeri naturali, che esiste per gli assioma dell'infinito e di separazione, è indicato con ω.

Gli assiomi di ZFC (secondo blocco)

7. Infinito: $\exists x(0 \in x \mid \forall y \in x \; Sy \in x)$
8. Potenza: $\exists y \forall z(z \subseteq x \Rightarrow z \in y)$
9. Scelta: $\exists f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F} \; \forall X \in \mathcal{F} \; (X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \in X)$

L'assioma della scelta è equivalente al
Principio del buon ordinamento. Ogni insieme è bene ordinabile.
Lemma di Zorn. Se A è un insieme (parzialmente) ordinato tale che ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato ha un maggiorante, allora A ha un elemento massimale.

(Un *ordine parziale* $\leq$ è una relazione riflessiva: $\forall x \; x \leq x$; transitiva: $\forall x, y, z \; (x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$; antisimmetrica: $\forall x, y \; (x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$. È totale se $\forall x, y \; (x \leq y \vee y \leq x)$.)

Definizione. L'insieme dei numeri naturali, che esiste per gli assioma dell'infinito e di separazione, è indicato con ω.

Teorema. ω è un ordinale. È il minimo degli ordinali infiniti (cioè non in biiezione con un numero naturale).

Gli assiomi di ZFC (secondo blocco)

7. Infinito: $\exists x(0 \in x \mid \forall y \in x \; Sy \in x)$
8. Potenza: $\exists y \forall z(z \subseteq x \Rightarrow z \in y)$
9. Scelta: $\exists f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F} \; \forall X \in \mathcal{F} \; (X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \in X)$

L'assioma della scelta è equivalente al
Principio del buon ordinamento. Ogni insieme è bene ordinabile.
Lemma di Zorn. Se A è un insieme (parzialmente) ordinato tale che ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato ha un maggiorante, allora A ha un elemento massimale.

(Un *ordine parziale* $\leq$ è una relazione riflessiva: $\forall x \; x \leq x$; transitiva: $\forall x, y, z \; (x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$; antisimmetrica: $\forall x, y \; (x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$. È totale se $\forall x, y \; (x \leq y \vee y \leq x)$.)

Definizione. L'insieme dei numeri naturali, che esiste per gli assioma dell'infinito e di separazione, è indicato con ω.

Teorema. ω è un ordinale. È il minimo degli ordinali infiniti (cioè non in biiezione con un numero naturale).

Definizione. $\mathcal{P}(x) = \{z \mid x \subseteq x\}$ è l'insieme *potenza* di x.

Numeri cardinali

Definizione. Dato un insieme A, la *cardinalità* di A, denotata $|A|$, è il minimo ordinale α in biiezione con A (l'esistenza di α è l'enunciato dell'assioma della scelta).
Se α è tale che $|A| = \alpha$ per qualche α (equivalentemente, $\alpha = |\alpha|$), allora α è un *numero cardinale*.
L'insieme A è *finito* se $|A|$ è un numero naturale.
L'insieme A è *numerabile* se $|A| \leq \omega$.

Numeri cardinali

Definizione. Dato un insieme A, la *cardinalità* di A, denotata $|A|$, è il minimo ordinale α in biiezione con A (l'esistenza di α è l'enunciato dell'assioma della scelta).
Se α è tale che $|A| = \alpha$ per qualche α (equivalentemente, $\alpha = |\alpha|$), allora α è un *numero cardinale*.
L'insieme A è *finito* se $|A|$ è un numero naturale.
L'insieme A è *numerabile* se $|A| \leq \omega$.

Teorema. Se κ, λ sono cardinali

- $\kappa = \lambda$ sse
  esiste una bijezione $\kappa \to \lambda$ sse
  esistono iniezioni $\kappa \to \lambda, \lambda \to \kappa$
- $\kappa \leq \lambda$ sse
  esiste una iniezione $\kappa \to \lambda$ sse
  esiste una suriezione $\lambda \to \kappa$

Il teorema di Cantor

Esistono cardinali arbitrariamente grandi:

Teorema. $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Il teorema di Cantor

Esistono cardinali arbitrariamente grandi:

Teorema. $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Dimostrazione. $a \mapsto \{a\}$ testimonia $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.

Il teorema di Cantor

Esistono cardinali arbitrariamente grandi:

Teorema. $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Dimostrazione. $a \mapsto \{a\}$ testimonia $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.
Viceversa, si mostra che non c'è alcuna suriezione $A \to \mathcal{P}(A)$. Sia $g : A \to \mathcal{P}(A)$ una funzione. Allora $I = \{x \in A \mid x \notin g(x)\} \notin img$.

Il teorema di Cantor

Esistono cardinali arbitrariamente grandi:

Teorema. $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Dimostrazione. $a \mapsto \{a\}$ testimonia $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.
Viceversa, si mostra che non c'è alcuna suriezione $A \to \mathcal{P}(A)$. Sia $g : A \to \mathcal{P}(A)$ una funzione. Allora $I = \{x \in A \mid x \notin g(x)\} \notin img$.

Definizione.

- α^+ è il minimo cardinale più grande di α.

Il teorema di Cantor

Esistono cardinali arbitrariamente grandi:

Teorema. $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Dimostrazione. $a \mapsto \{a\}$ testimonia $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.
Viceversa, si mostra che non c'è alcuna suriezione $A \to \mathcal{P}(A)$. Sia $g : A \to \mathcal{P}(A)$ una funzione. Allora $I = \{x \in A \mid x \notin g(x)\} \notin img$.

Definizione.

- α^+ è il minimo cardinale più grande di α.
- κ è un *cardinale successore* se $\kappa = \alpha^+$ per qualche α.

Il teorema di Cantor

Esistono cardinali arbitrariamente grandi:

Teorema. $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Dimostrazione. $a \mapsto \{a\}$ testimonia $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.
Viceversa, si mostra che non c'è alcuna suriezione $A \to \mathcal{P}(A)$. Sia $g : A \to \mathcal{P}(A)$ una funzione. Allora $I = \{x \in A \mid x \notin g(x)\} \notin img$.

Definizione.

- α^+ è il minimo cardinale più grande di α.
- κ è un *cardinale successore* se $\kappa = \alpha^+$ per qualche α.
- Un cardinale κ è un *cardinale limite* se $\kappa > \omega$ e κ non è un cardinale successore.

La sequenza degli $\aleph$

Si definisce la sequenza dei cardinali $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$:

La sequenza degli $\aleph$

Si definisce la sequenza dei cardinali $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$:

Definizione.

- $\omega_0 = \omega$

La sequenza degli $\aleph$

Si definisce la sequenza dei cardinali $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$:

Definizione.

- $\omega_0 = \omega$
- $\omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha^+$

La sequenza degli $\aleph$

Si definisce la sequenza dei cardinali $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$:

Definizione.

- $\omega_0 = \omega$
- $\omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha^+$
- Se λ è un ordinale limite, $\omega_\lambda = \sup\{\omega_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$

La sequenza degli $\aleph$

Si definisce la sequenza dei cardinali $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$:

Definizione.

- $\omega_0 = \omega$
- $\omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha^+$
- Se λ è un ordinale limite, $\omega_\lambda = \sup\{\omega_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$

Teorema.

1. La sequenza degli $\aleph_\alpha$ contiene tutti e soli i numeri cardinali
2. $\alpha < \beta \Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$
3. $\aleph_\alpha$ è un cardinale successore sse α è un ordinale successore; $\aleph_\alpha$ è un cardinale limite sse α è un ordinale limite

Operazioni sui cardinali

Si possono definire operazioni di somma, prodotto e esponenziazione cardinale. Estendono le corrispondenti operazioni sui naturali, ma non coincidono con le operazioni definite sugli ordinali infiniti.

Addizione. $\kappa + \lambda$ è la cardinalità di un'unione disgiunta di un insieme di cardinalità κ e uno di cardinalità λ:
$\kappa + \lambda = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$.

Moltiplicazione. $\kappa + \lambda$ è la cardinalità di un prodotto cartesiano di un insieme di cardinalità κ e uno di cardinalità λ:
$\kappa\lambda = |\kappa \times \lambda|$.

Operazioni sui cardinali

Si possono definire operazioni di somma, prodotto e esponenziazione cardinale. Estendono le corrispondenti operazioni sui naturali, ma non coincidono con le operazioni definite sugli ordinali infiniti.

Addizione. $\kappa + \lambda$ è la cardinalità di un'unione disgiunta di un insieme di cardinalità κ e uno di cardinalità λ:
$\kappa + \lambda = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$.

Moltiplicazione. $\kappa + \lambda$ è la cardinalità di un prodotto cartesiano di un insieme di cardinalità κ e uno di cardinalità λ:
$\kappa\lambda = |\kappa \times \lambda|$.

Tuttavia queste operazioni non sono interessanti: se almeno uno tra κ e λ è infinito,
$\kappa + \lambda = \kappa\lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

Operazioni sui cardinali

Definizione. Per A, B insiemi, $A^B = {}^B A = \{f : B \to A\}$.

Operazioni sui cardinali

Definizione. Per A, B insiemi, $A^B = {}^B A = \{f : B \to A\}$.
Se κ, λ sono ordinali, è di solito preferibile usare la notazione ${}^\lambda \kappa$ per questo insieme di funzioni, per evitare confusione col numero cardinale κ^λ.

Operazioni sui cardinali

Definizione. Per A, B insiemi, $A^B = {}^B A = \{f : B \to A\}$.
Se κ, λ sono ordinali, è di solito preferibile usare la notazione ${}^\lambda\kappa$ per questo insieme di funzioni, per evitare confusione col numero cardinale κ^λ.

Esponenziazione. Se κ, λ sono cardinali, $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$.

Operazioni sui cardinali

Definizione. Per A, B insiemi, $A^B = {}^B A = \{f : B \to A\}$.
Se κ, λ sono ordinali, è di solito preferibile usare la notazione ${}^\lambda\kappa$ per questo insieme di funzioni, per evitare confusione col numero cardinale κ^λ.

Esponenziazione. Se κ, λ sono cardinali, $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$.

Esempi.
$2^\lambda = |\mathcal{P}(\lambda)|$

Operazioni sui cardinali

Definizione. Per A, B insiemi, $A^B = {}^B A = \{f : B \to A\}$.
Se κ, λ sono ordinali, è di solito preferibile usare la notazione ${}^\lambda\kappa$ per questo insieme di funzioni, per evitare confusione col numero cardinale κ^λ.

Esponenziazione. Se κ, λ sono cardinali, $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$.

Esempi.
$2^\lambda = |\mathcal{P}(\lambda)|$
$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ è la cardinalità del *continuo*

Operazioni sui cardinali

Definizione. Per A, B insiemi, $A^B = {}^B A = \{f : B \to A\}$.
Se κ, λ sono ordinali, è di solito preferibile usare la notazione ${}^\lambda\kappa$ per questo insieme di funzioni, per evitare confusione col numero cardinale κ^λ.

Esponenziazione. Se κ, λ sono cardinali, $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$.

Esempi.
$2^\lambda = |\mathcal{P}(\lambda)|$
$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ è la cardinalità del *continuo*

Teorema. Se $2 \leq \kappa \leq \lambda$ e λ è infinito, $\lambda < 2^\lambda = \kappa^\lambda$.

Operazioni sui cardinali

Definizione. Per A, B insiemi, $A^B = {}^B A = \{f : B \to A\}$.
Se κ, λ sono ordinali, è di solito preferibile usare la notazione ${}^\lambda\kappa$ per questo insieme di funzioni, per evitare confusione col numero cardinale κ^λ.

Esponenziazione. Se κ, λ sono cardinali, $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$.

Esempi.
$2^\lambda = |\mathcal{P}(\lambda)|$
$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ è la cardinalità del *continuo*

Teorema. Se $2 \leq \kappa \leq \lambda$ e λ è infinito, $\lambda < 2^\lambda = \kappa^\lambda$.

Dimostrazione. $2^\lambda \leq \kappa^\lambda$

Operazioni sui cardinali

Definizione. Per A, B insiemi, $A^B = {}^B A = \{f : B \to A\}$.
Se κ, λ sono ordinali, è di solito preferibile usare la notazione ${}^\lambda\kappa$ per questo insieme di funzioni, per evitare confusione col numero cardinale κ^λ.

Esponenziazione. Se κ, λ sono cardinali, $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$.

Esempi.
$2^\lambda = |\mathcal{P}(\lambda)|$
$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ è la cardinalità del *continuo*

Teorema. Se $2 \leq \kappa \leq \lambda$ e λ è infinito, $\lambda < 2^\lambda = \kappa^\lambda$.

Dimostrazione. $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda$

Operazioni sui cardinali

Definizione. Per A, B insiemi, $A^B = {}^B A = \{f : B \to A\}$.
Se κ, λ sono ordinali, è di solito preferibile usare la notazione ${}^\lambda\kappa$ per questo insieme di funzioni, per evitare confusione col numero cardinale κ^λ.

Esponenziazione. Se κ, λ sono cardinali, $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$.

Esempi.
$2^\lambda = |\mathcal{P}(\lambda)|$
$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ è la cardinalità del *continuo*

Teorema. Se $2 \leq \kappa \leq \lambda$ e λ è infinito, $\lambda < 2^\lambda = \kappa^\lambda$.

Dimostrazione. $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda \leq |\mathcal{P}(\lambda \times \lambda)|$

Operazioni sui cardinali

Definizione. Per A, B insiemi, $A^B = {}^B A = \{f : B \to A\}$.
Se κ, λ sono ordinali, è di solito preferibile usare la notazione ${}^\lambda \kappa$ per questo insieme di funzioni, per evitare confusione col numero cardinale κ^λ.

Esponenziazione. Se κ, λ sono cardinali, $\kappa^\lambda = |{}^\lambda \kappa|$.

Esempi.
$2^\lambda = |\mathcal{P}(\lambda)|$
$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ è la cardinalità del *continuo*

Teorema. Se $2 \leq \kappa \leq \lambda$ e λ è infinito, $\lambda < 2^\lambda = \kappa^\lambda$.

Dimostrazione. $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda \leq |\mathcal{P}(\lambda \times \lambda)| = |\mathcal{P}(\lambda)|$

Operazioni sui cardinali

Definizione. Per A, B insiemi, $A^B = {}^B A = \{f : B \to A\}$.
Se κ, λ sono ordinali, è di solito preferibile usare la notazione ${}^\lambda \kappa$ per questo insieme di funzioni, per evitare confusione col numero cardinale κ^λ.

Esponenziazione. Se κ, λ sono cardinali, $\kappa^\lambda = |{}^\lambda \kappa|$.

Esempi.
$2^\lambda = |\mathcal{P}(\lambda)|$
$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ è la cardinalità del *continuo*

Teorema. Se $2 \leq \kappa \leq \lambda$ e λ è infinito, $\lambda < 2^\lambda = \kappa^\lambda$.

Dimostrazione. $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda \leq |\mathcal{P}(\lambda \times \lambda)| = |\mathcal{P}(\lambda)| = 2^\lambda$.

L'ipotesi del continuo

Il teorema di Cantor asserisce che $\forall\alpha\ 2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}$.

L'ipotesi del continuo

Il teorema di Cantor asserisce che $\forall\alpha\ 2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}$.

Definizione.

- CH è l'enunciato: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$
- GCH è l'enunciato $\forall\alpha\ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$

L'ipotesi del continuo

Il teorema di Cantor asserisce che $\forall\alpha\ 2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}$.

Definizione.

- CH è l'enunciato: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$
- GCH è l'enunciato $\forall\alpha\ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$

Si tratta dei più famosi enunciati *indipendenti* in *ZFC*, cioè tali che (se *ZFC* è consistente) nè essi nè le loro negazioni sono dimostrabili.

La cofinalità

Definizione. Sia $L = (L, \leq)$ un ordine totale senza massimo elemento. La *cofinalità* $cof(L)$ di L è il minimo ordinale α tale che esiste una funzione illimitata (*cofinale*) $f : \alpha \to L$.

La cofinalità

Definizione. Sia $L = (L, \leq)$ un ordine totale senza massimo elemento. La *cofinalità* $cof(L)$ di L è il minimo ordinale α tale che esiste una funzione illimitata (*cofinale*) $f : \alpha \to L$. La funzione f può essere presa strettamente crescente.

La cofinalità

Definizione. Sia $L = (L, \leq)$ un ordine totale senza massimo elemento. La *cofinalità* $cof(L)$ di L è il minimo ordinale α tale che esiste una funzione illimitata (*cofinale*) $f : \alpha \to L$. La funzione f può essere presa strettamente crescente.
In particolare, $cof(L) \leq |L|$.

La cofinalità

Definizione. Sia $L = (L, \leq)$ un ordine totale senza massimo elemento. La *cofinalità* $cof(L)$ di L è il minimo ordinale α tale che esiste una funzione illimitata (*cofinale*) $f : \alpha \to L$. La funzione f può essere presa strettamente crescente.
In particolare, $cof(L) \leq |L|$.

Lemma.

1. $cof(L)$ è un cardinale
2. Se α, β sono ordinali limiti e $f : \alpha \to \beta$ è strettamente crescente e cofinale, allora $cof(\alpha) = cof(\beta)$
3. $cof(cof(\beta)) = cof(\beta)$

La cofinalità

Definizione. Sia $L = (L, \leq)$ un ordine totale senza massimo elemento. La *cofinalità* $cof(L)$ di L è il minimo ordinale α tale che esiste una funzione illimitata (*cofinale*) $f : \alpha \to L$. La funzione f può essere presa strettamente crescente.
In particolare, $cof(L) \leq |L|$.

Lemma.

1. $cof(L)$ è un cardinale
2. Se α, β sono ordinali limiti e $f : \alpha \to \beta$ è strettamente crescente e cofinale, allora $cof(\alpha) = cof(\beta)$
3. $cof(cof(\beta)) = cof(\beta)$

Dimostrazione (2) $cof(\beta) \leq cof(\alpha)$ per l'esistenza della funzione cofinale $cof(\alpha) \to \alpha \to \beta$. Viceversa, sia $g : cof(\beta) \to \beta$ cofinale e $h : cof(\beta) \to \alpha$ definita da $h(\xi) = \min\{\eta \mid f(\eta) > g(\xi)\}$.

La cofinalità

Esempi. $cof(\omega) = \omega$.

La cofinalità

Esempi. $cof(\omega) = \omega$.
$cof(\aleph_1) = \aleph_1$; più in generale, ogni cardinale successore è regolare.

La cofinalità

Esempi. $cof(\omega) = \omega$.
$cof(\aleph_1) = \aleph_1$; più in generale, ogni cardinale successore è regolare.
$cof(\aleph_\omega) = \omega$, infatti $f : \omega \to \aleph_\omega, n \mapsto \aleph_n$ è illimitata

La cofinalità

Esempi. $cof(\omega) = \omega$.
$cof(\aleph_1) = \aleph_1$; più in generale, ogni cardinale successore è regolare.
$cof(\aleph_\omega) = \omega$, infatti $f : \omega \to \aleph_\omega, n \mapsto \aleph_n$ è illimitata

In generale, se α è un ordinale limite, allora $cof(\aleph_\alpha) = cof(\alpha)$.

La cofinalità

Esempi. $cof(\omega) = \omega$.
$cof(\aleph_1) = \aleph_1$; più in generale, ogni cardinale successore è regolare.
$cof(\aleph_\omega) = \omega$, infatti $f : \omega \to \aleph_\omega, n \mapsto \aleph_n$ è illimitata

In generale, se α è un ordinale limite, allora $cof(\aleph_\alpha) = cof(\alpha)$. Dunque se $\aleph_\alpha$ è un cardinale limite regolare, $\aleph_\alpha = \alpha$.

La cofinalità

Esempi. $cof(\omega) = \omega$.
$cof(\aleph_1) = \aleph_1$; più in generale, ogni cardinale successore è regolare.
$cof(\aleph_\omega) = \omega$, infatti $f : \omega \to \aleph_\omega, n \mapsto \aleph_n$ è illimitata

In generale, se α è un ordinale limite, allora $cof(\aleph_\alpha) = cof(\alpha)$. Dunque se $\aleph_\alpha$ è un cardinale limite regolare, $\aleph_\alpha = \alpha$. Questa condizione non è però sufficiente: sia

- $\alpha_0 = \aleph_0$
- $\alpha_{n+1} = \aleph_{\alpha_n}$
- $\alpha = \sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\}$

Allora $\aleph_\alpha = \alpha$,

La cofinalità

Esempi. $cof(\omega) = \omega$.
$cof(\aleph_1) = \aleph_1$; più in generale, ogni cardinale successore è regolare.
$cof(\aleph_\omega) = \omega$, infatti $f : \omega \to \aleph_\omega, n \mapsto \aleph_n$ è illimitata

In generale, se α è un ordinale limite, allora $cof(\aleph_\alpha) = cof(\alpha)$. Dunque se $\aleph_\alpha$ è un cardinale limite regolare, $\aleph_\alpha = \alpha$. Questa condizione non è però sufficiente: sia

- $\alpha_0 = \aleph_0$
- $\alpha_{n+1} = \aleph_{\alpha_n}$
- $\alpha = \sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\}$

Allora $\aleph_\alpha = \alpha$, ma $cof(\aleph_\alpha) = cof(\alpha) = \omega$.

La cofinalità

Esempi. $cof(\omega) = \omega$.
$cof(\aleph_1) = \aleph_1$; più in generale, ogni cardinale successore è regolare.
$cof(\aleph_\omega) = \omega$, infatti $f : \omega \to \aleph_\omega, n \mapsto \aleph_n$ è illimitata

In generale, se α è un ordinale limite, allora $cof(\aleph_\alpha) = cof(\alpha)$. Dunque se $\aleph_\alpha$ è un cardinale limite regolare, $\aleph_\alpha = \alpha$. Questa condizione non è però sufficiente: sia

- $\alpha_0 = \aleph_0$
- $\alpha_{n+1} = \aleph_{\alpha_n}$
- $\alpha = \sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\}$

Allora $\aleph_\alpha = \alpha$, ma $cof(\aleph_\alpha) = cof(\alpha) = \omega$.

$cof(\kappa) = \lambda$ significa che κ è unione di λ insiemi di cardinalità minore di κ.

Cardinali inaccessibili

Un modo di costruire in ZFC dei cardinali via via più grandi è di iterare le operazioni di potenza $\kappa \mapsto 2^\kappa$ e estremo superiore $\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \mapsto \sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$:

Cardinali inaccessibili

Un modo di costruire in ZFC dei cardinali via via più grandi è di iterare le operazioni di potenza $\kappa \mapsto 2^\kappa$ e estremo superiore $\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \mapsto \sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$: quest'ultimo ha cofinalità $\leq \lambda$.

Cardinali inaccessibili

Un modo di costruire in ZFC dei cardinali via via più grandi è di iterare le operazioni di potenza $\kappa \mapsto 2^\kappa$ e estremo superiore $\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \mapsto \sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$: quest'ultimo ha cofinalità $\leq \lambda$.

Definizione. Un cardinale infinito κ è *regolare* se $\mathit{cof}(\kappa) = \kappa$. Altrimenti è *singolare*.

Cardinali inaccessibili

Un modo di costruire in ZFC dei cardinali via via più grandi è di iterare le operazioni di potenza $\kappa \mapsto 2^\kappa$ e estremo superiore $\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \mapsto \sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$: quest'ultimo ha cofinalità $\leq \lambda$.

Definizione. Un cardinale infinito κ è *regolare* se $cof(\kappa) = \kappa$. Altrimenti è *singolare*.

Per esempio: $\aleph_0$ e i cardinali successori sono regolari; $\aleph_\omega$ è singolare.

Cardinali inaccessibili

Definizione.

- κ è *debolmente inaccessibile* se κ è un cardinale limite regolare

Cardinali inaccessibili

Definizione.

- κ è *debolmente inaccessibile* se κ è un cardinale limite regolare
- κ è *fortemente inaccessibile* se $\kappa > \aleph_0$, κ è regolare e $\forall \lambda < \kappa \; 2^\lambda < \kappa$

Cardinali inaccessibili

Definizione.

- κ è *debolmente inaccessibile* se κ è un cardinale limite regolare
- κ è *fortemente inaccessibile* se $\kappa > \aleph_0$, κ è regolare e $\forall \lambda < \kappa \ 2^\lambda < \kappa$

Quindi: κ fortemente inaccessibile $\Rightarrow$ κ debolmente inaccessibile

Cardinali inaccessibili

Definizione.

- κ è *debolmente inaccessibile* se κ è un cardinale limite regolare
- κ è *fortemente inaccessibile* se $\kappa > \aleph_0$, κ è regolare e $\forall \lambda < \kappa \ 2^\lambda < \kappa$

Quindi: κ fortemente inaccessibile $\Rightarrow$ κ debolmente inaccessibile
(GCH) κ fortemente inaccessibile $\Leftrightarrow$ κ debolmente inaccessibile

Cardinali inaccessibili

Definizione.

- κ è *debolmente inaccessibile* se κ è un cardinale limite regolare
- κ è *fortemente inaccessibile* se $\kappa > \aleph_0$, κ è regolare e $\forall \lambda < \kappa \; 2^\lambda < \kappa$

Quindi: κ fortemente inaccessibile $\Rightarrow$ κ debolmente inaccessibile
(GCH) κ fortemente inaccessibile $\Leftrightarrow$ κ debolmente inaccessibile

L'esistenza di cardinali debolmente inaccessibili non è dimostrabile in ZFC.

Cardinali inaccessibili

Definizione.

- κ è *debolmente inaccessibile* se κ è un cardinale limite regolare
- κ è *fortemente inaccessibile* se $\kappa > \aleph_0$, κ è regolare e $\forall \lambda < \kappa\ 2^\lambda < \kappa$

Quindi: κ fortemente inaccessibile $\Rightarrow$ κ debolmente inaccessibile
(GCH) κ fortemente inaccessibile $\Leftrightarrow$ κ debolmente inaccessibile

L'esistenza di cardinali debolmente inaccessibili non è dimostrabile in ZFC.

È equiconsistente con l'esistenza di un debolmente inaccessibile che $2^{\aleph_0}$ sia debolmente inaccessibile, o che sia più grande che un debolmente inaccessibile.

La teoria degli insiemi

Le linee di ricerca principali in teoria degli insiemi sono attualmente:

- Combinatorica infinita
- Grandi cardinali
- Dimostrazioni di consistenza e indipendenza
- Modelli interni
- Forcing
- Teoria descrittiva degli insiemi
- Determinatezza
- Set theoretic topology
- Fuzzy set theory