Calcoli logici

Cos'è un calcolo logico?

Un *calcolo logico* è un sistema formale per fare delle *dimostrazioni*, cioè per dedurre delle conseguenze da un dato insieme di premesse.

Cos'è un calcolo logico?

Un *calcolo logico* è un sistema formale per fare delle *dimostrazioni*, cioè per dedurre delle conseguenze da un dato insieme di premesse.

Si tratta di una nozione *sintattica*, cioè che si basa solo sulla struttura sintattica delle formule, senza tener conto delle loro interpretazioni.

Cos'è un calcolo logico?

Un *calcolo logico* è un sistema formale per fare delle *dimostrazioni*, cioè per dedurre delle conseguenze da un dato insieme di premesse.

Si tratta di una nozione *sintattica*, cioè che si basa solo sulla struttura sintattica delle formule, senza tener conto delle loro interpretazioni.

Se Γ è un insieme di enunciati e σ è un enunciato, in un linguaggio fissato $\mathcal{L}$, per esprimere che σ è *dimostrabile* (*derivabile*, *deducibile*,...) da Γ si scrive:

$$\Gamma \vdash \sigma$$

Cos'è un calcolo logico?

Un *calcolo logico* è un sistema formale per fare delle *dimostrazioni*, cioè per dedurre delle conseguenze da un dato insieme di premesse.

Si tratta di una nozione *sintattica*, cioè che si basa solo sulla struttura sintattica delle formule, senza tener conto delle loro interpretazioni.

Se Γ è un insieme di enunciati e σ è un enunciato, in un linguaggio fissato $\mathcal{L}$, per esprimere che σ è *dimostrabile* (*derivabile*, *deducibile*,...) da Γ si scrive:

$$\Gamma \vdash \sigma$$

Nota: non confondere $\vdash$ con $\models$:

Cos'è un calcolo logico?

Un *calcolo logico* è un sistema formale per fare delle *dimostrazioni*, cioè per dedurre delle conseguenze da un dato insieme di premesse.

Si tratta di una nozione *sintattica*, cioè che si basa solo sulla struttura sintattica delle formule, senza tener conto delle loro interpretazioni.

Se Γ è un insieme di enunciati e σ è un enunciato, in un linguaggio fissato $\mathcal{L}$, per esprimere che σ è *dimostrabile* (*derivabile*, *deducibile*,...) da Γ si scrive:

$$\Gamma \vdash \sigma$$

Nota: non confondere $\vdash$ con $\models$:

$\Gamma \models \sigma$ significa che se $\mathcal{M}$ è un modello di Γ, allora $\mathcal{M}$ soddisfa anche σ

Cos'è un calcolo logico?

Un *calcolo logico* è un sistema formale per fare delle *dimostrazioni*, cioè per dedurre delle conseguenze da un dato insieme di premesse.

Si tratta di una nozione *sintattica*, cioè che si basa solo sulla struttura sintattica delle formule, senza tener conto delle loro interpretazioni.

Se Γ è un insieme di enunciati e σ è un enunciato, in un linguaggio fissato $\mathcal{L}$, per esprimere che σ è *dimostrabile* (*derivabile*, *deducibile*,...) da Γ si scrive:

$$\Gamma \vdash \sigma$$

Nota: non confondere (per ora!) $\vdash$ con $\models$:

$\Gamma \models \sigma$ significa che se $\mathcal{M}$ è un modello di Γ, allora $\mathcal{M}$ soddisfa anche σ

Un esempio: la deduzione naturale

Esistono vari calcoli logici equivalenti, che formalizzano la nozione di dimostrazione.

Un esempio: la deduzione naturale

Esistono vari calcoli logici equivalenti, che formalizzano la nozione di dimostrazione.
(Ed evidentemente, come succede sempre in matematica, ne sono stati sviluppati anche altri, che non sono equivalenti a quelli che ci interessano ora)

Un esempio: la deduzione naturale

Esistono vari calcoli logici equivalenti, che formalizzano la nozione di dimostrazione.
(Ed evidentemente, come succede sempre in matematica, ne sono stati sviluppati anche altri, che non sono equivalenti a quelli che ci interessano ora)

Tipicamente, un *calcolo logico* è un insieme di *regole di deduzione*.

Un esempio: la deduzione naturale

Esistono vari calcoli logici equivalenti, che formalizzano la nozione di dimostrazione.
(Ed evidentemente, come succede sempre in matematica, ne sono stati sviluppati anche altri, che non sono equivalenti a quelli che ci interessano ora)

Tipicamente, un *calcolo logico* è un insieme di *regole di deduzione*.
Ogni regola è costituita da:

- una *premessa*
- una *conclusione*
-

Un esempio: la deduzione naturale

Esistono vari calcoli logici equivalenti, che formalizzano la nozione di dimostrazione.
(Ed evidentemente, come succede sempre in matematica, ne sono stati sviluppati anche altri, che non sono equivalenti a quelli che ci interessano ora)

Tipicamente, un *calcolo logico* è un insieme di *regole di deduzione*.
Ogni regola è costituita da:

- una *premessa*
- una *conclusione*
- eventualmente delle condizioni di applicabilità della regola

Un esempio: la deduzione naturale

Chiamerò *sequente* un espressione della forma $\Gamma \vdash \varphi$, dove Γ è un insieme di formule e φ è una formula.

Un esempio: la deduzione naturale

Chiamerò *sequente* un espressione della forma $\Gamma \vdash \varphi$, dove Γ è un insieme di formule e φ è una formula.

Il sistema della *deduzione naturale* è costituito da regole il cui scopo è garantire che i simboli logici (connettivi, quantificatori, uguaglianza) si comportino come uno si aspetta.

Un esempio: la deduzione naturale

Chiamerò *sequente* un espressione della forma $\Gamma \vdash \varphi$, dove Γ è un insieme di formule e φ è una formula.

Il sistema della *deduzione naturale* è costituito da regole il cui scopo è garantire che i simboli logici (connettivi, quantificatori, uguaglianza) si comportino come uno si aspetta.

La premessa di ogni regola è un insieme (eventualmente vuoto) di sequenti, la conseguenza è un sequente.

Un esempio: la deduzione naturale

Esempi di regole della deduzione naturale:

Un esempio: la deduzione naturale

Esempi di regole della deduzione naturale:

- (assumption)
  - premesse: nessuna
  - conseguenza: $\Gamma \vdash \varphi$
  - condizione di applicabilità: $\varphi \in \Gamma$

Un esempio: la deduzione naturale

Esempi di regole della deduzione naturale:

- (assumption)
  - premesse: nessuna
  - conseguenza: $\Gamma \vdash \varphi$
  - condizione di applicabilità: $\varphi \in \Gamma$
- ($\wedge$-introduction)
  - premesse: $\Gamma \vdash \varphi, \Gamma \vdash \psi$
  - conclusione: $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$

Un esempio: la deduzione naturale

Esempi di regole della deduzione naturale:

- (assumption)
  - premesse: nessuna
  - conseguenza: $\Gamma \vdash \varphi$
  - condizione di applicabilità: $\varphi \in \Gamma$
- ($\wedge$-introduction)
  - premesse: $\Gamma \vdash \varphi, \Gamma \vdash \psi$
  - conclusione: $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$
- ($\wedge$-elimination, left)
  - premesse: $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$
  - conclusione: $\Gamma \vdash \varphi$
- ($\wedge$-elimination, right)
  - premesse: $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$
  - conclusione: $\Gamma \vdash \psi$

Un esempio: la deduzione naturale

Esempi di regole della deduzione naturale:

- ($\neg$-introduction)
  - premesse: $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi, \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$

Un esempio: la deduzione naturale

Esempi di regole della deduzione naturale:

- ($\neg$-introduction)
  - premesse: $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi, \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$
  - conclusione: $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Un esempio: la deduzione naturale

Esempi di regole della deduzione naturale:

- ($\neg$-introduction)
  - premesse: $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi, \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$
  - conclusione: $\Gamma \vdash \neg\varphi$
- ($\vee$-elimination)
  - premesse: $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \theta, \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \theta$

Un esempio: la deduzione naturale

Esempi di regole della deduzione naturale:

- ($\neg$-introduction)
  - premesse: $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi, \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$
  - conclusione: $\Gamma \vdash \neg\varphi$
- ($\vee$-elimination)
  - premesse: $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \theta, \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \theta$
  - conclusione: $\Gamma \vdash \theta$

Un esempio: la deduzione naturale

Esempi di regole della deduzione naturale:

- ($\neg$-introduction)
  - premesse: $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi, \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$
  - conclusione: $\Gamma \vdash \neg\varphi$
- ($\vee$-elimination)
  - premesse: $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \theta, \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \theta$
  - conclusione: $\Gamma \vdash \theta$
- (contradiction)
  - premesse: $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$
  - conclusione: $\Gamma \vdash \psi$

Le dimostrazioni

Siano Γ un insieme di formule, φ una formula.

Una *dimostrazione* di φ da Γ è una successione finita di sequenti

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \vdash & \varphi_1 \\ \Gamma_2 & \vdash & \varphi_2 \\ & \dots & \\ \Gamma & \vdash & \varphi \end{array}$$

Le dimostrazioni

Siano Γ un insieme di formule, φ una formula.

Una *dimostrazione* di φ da Γ è una successione finita di sequenti

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \vdash & \varphi_1 \\ \Gamma_2 & \vdash & \varphi_2 \\ & \dots & \\ \Gamma & \vdash & \varphi \end{array}$$

ognuno ottenuto come conseguenza (di alcuni) dei precenti mediante l'applicazione di una delle regole di deduzione

Le dimostrazioni

Siano Γ un insieme di formule, φ una formula.

Una *dimostrazione* di φ da Γ è una successione finita di sequenti

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \vdash & \varphi_1 \\ \Gamma_2 & \vdash & \varphi_2 \\ & \dots & \\ \Gamma & \vdash & \varphi \end{array}$$

ognuno ottenuto come conseguenza (di alcuni) dei precenti mediante l'applicazione di una delle regole di deduzione (in particolare, $\Gamma_1 \vdash \varphi_1$ dev'essere la conclusione di una regola a zero premesse).

Le dimostrazioni

Siano Γ un insieme di formule, φ una formula.

Una *dimostrazione* di φ da Γ è una successione finita di sequenti

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \vdash & \varphi_1 \\ \Gamma_2 & \vdash & \varphi_2 \\ & \dots & \\ \Gamma & \vdash & \varphi \end{array}$$

ognuno ottenuto come conseguenza (di alcuni) dei precenti mediante l'applicazione di una delle regole di deduzione (in particolare, $\Gamma_1 \vdash \varphi_1$ dev'essere la conclusione di una regola a zero premesse).

In questo caso φ è un *teorema* della teoria (generata da) Γ.

Esempio

(non-) Esempio

Siano:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{\forall x \forall y \forall z\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),\\ &\quad \forall x\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x,\\ &\quad \forall x\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1\}\end{aligned}$$

(non-) Esempio

Siano:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{\forall x \forall y \forall z\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),\\ &\quad \forall x\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x,\\ &\quad \forall x\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1\}\end{aligned}$$

$$\varphi : \forall x\ (\forall y\ x \cdot y = y \cdot x = y \Rightarrow x = 1)$$

(non-) Esempio

Siano:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{\forall x \forall y \forall z\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \\ &\quad \forall x\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \\ &\quad \forall x\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1\} \end{aligned}$$

$$\varphi : \forall x\ (\forall y\ x \cdot y = y \cdot x = y \Rightarrow x = 1)$$

Questione: $\Gamma \vdash \varphi$? Cioè: l'unicità dell'elemento neutro è un teorema della teoria dei gruppi?

(non-) Esempio

Siano:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma & = & \{\forall x \forall y \forall z\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \\ & & \ \forall x\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \\ & & \ \forall x\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1\} \end{array}$$

$$\varphi : \forall x\ (\forall y\ x \cdot y = y \cdot x = y \Rightarrow x = 1)$$

Questione: $\Gamma \vdash \varphi$? Cioè: l'unicità dell'elemento neutro è un teorema della teoria dei gruppi?

La risposta la conosciamo: è sì.

(non-) Esempio

Siano:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{\forall x \forall y \forall z\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \\ &\quad \forall x\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \\ &\quad \forall x\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1\}\end{aligned}$$

$$\varphi : \forall x\ (\forall y\ x \cdot y = y \cdot x = y \Rightarrow x = 1)$$

Questione: $\Gamma \vdash \varphi$? Cioè: l'unicità dell'elemento neutro è un teorema della teoria dei gruppi?

La risposta la conosciamo: è sì. Tuttavia sembra molto difficile fornirne una dimostrazione formale (tralasciando il fatto che non ho fornito la lista completa delle regole...).

(non-) Esempio

Siano:

$$\begin{array}{rcl}\Gamma & = & \{\forall x \forall y \forall z\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \\ & & \forall x\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \\ & & \forall x\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1\}\end{array}$$

$$\varphi : \forall x\ (\forall y\ x \cdot y = y \cdot x = y \Rightarrow x = 1)$$

Questione: $\Gamma \vdash \varphi$? Cioè: l'unicità dell'elemento neutro è un teorema della teoria dei gruppi?

La risposta la conosciamo: è sì. Tuttavia sembra molto difficile fornirne una dimostrazione formale (tralasciando il fatto che non ho fornito la lista completa delle regole...).
Eppure ci ricordiamo che l'argomento per l'unicità dell'elemento neutro non è molto complicato.

Esempio

Il ragionamento che di solito facciamo procede così:

Esempio

Il ragionamento che di solito facciamo procede così:

Sia G un gruppo.

Esempio

Il ragionamento che di solito facciamo procede così:

Sia G un gruppo.

Sia g un elemento di G.

Esempio

Il ragionamento che di solito facciamo procede così:

Sia G un gruppo.

Sia g un elemento di G. Se per ogni elemento h di G si ha che $gh = hg = h$

Esempio

Il ragionamento che di solito facciamo procede così:

Sia G un gruppo.

Sia g un elemento di G. Se per ogni elemento h di G si ha che $gh = hg = h$ ...

Esempio

Il ragionamento che di solito facciamo procede così:

Sia G un gruppo.

Sia g un elemento di G. Se per ogni elemento h di G si ha che $gh = hg = h$ ... allora $g = 1_G$

Esempio

Il ragionamento che di solito facciamo procede così:

Sia G un gruppo.

Sia G tale che $G \models \Gamma$

Sia g un elemento di G. Se per ogni elemento h di G si ha che $gh = hg = h$ ... allora $g = 1_G$

Esempio

Il ragionamento che di solito facciamo procede così:

Sia G un gruppo.

Sia G tale che $G \models \Gamma$

Sia g un elemento di G. Se per ogni elemento h di G si ha che $gh = hg = h$ ... allora $g = 1_G$

Allora $G \models \varphi$

Esempio

Il ragionamento che di solito facciamo procede così:

Sia G un gruppo.

  Sia G tale che $G \models \Gamma$

Sia g un elemento di G. Se per ogni elemento h di G si ha che $gh = hg = h$ ... allora $g = 1_G$

  Allora $G \models \varphi$

Questo ragionamento (che è il più tipico in matematica) non mostra che $\Gamma \vdash \varphi$, ma piuttosto che $\Gamma \models \varphi$. Si è cioè provato che φ è *conseguenza logica* di Γ (nozione semantica), non che φ è *dimostrabile formalmente* da Γ (nozione sintattica).

Il teorema di completezza

Qual è il legame tra le due nozioni?

Teorema di completezza. (Gödel)

Il teorema di completezza

Qual è il legame tra le due nozioni?

Teorema di completezza. (Gödel)

Dato un'insieme di enunciati Γ e un enunciato φ

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ sse } \Gamma \models \varphi$$

Un'applicazione

Definizione. Dato un insieme di enunciati Γ, la *teoria generata* da Γ è $T = \{\sigma \mid T \vdash \sigma\}$. Γ è l'insieme degli *assiomi* di T.

Un'applicazione

Definizione. Dato un insieme di enunciati Γ, la *teoria generata* da Γ è $T = \{\sigma \mid T \vdash \sigma\}$. Γ è l'insieme degli *assiomi* di T. Tuttavia, con abuso di linguaggio, si parlerà di *teoria* Γ intendendo la teoria assiomatizzata da Γ.

Un'applicazione

Definizione. Dato un insieme di enunciati Γ, la *teoria generata* da Γ è $T = \{\sigma \mid T \vdash \sigma\}$. Γ è l'insieme degli *assiomi* di T. Tuttavia, con abuso di linguaggio, si parlerà di *teoria* Γ intendendo la teoria assiomatizzata da Γ.

Una teoria Γ è *inconsistente* se esiste un enunciato φ tale che $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$; altrimenti, Γ è *consistente*.

Un'applicazione

Definizione. Dato un insieme di enunciati Γ, la *teoria generata* da Γ è $T = \{\sigma \mid T \vdash \sigma\}$. Γ è l'insieme degli *assiomi* di T. Tuttavia, con abuso di linguaggio, si parlerà di *teoria* Γ intendendo la teoria assiomatizzata da Γ.

Una teoria Γ è *inconsistente* se esiste un enunciato φ tale che $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$; altrimenti, Γ è *consistente*.

Teorema. Una teoria Γ è consistente se e solo se ha un modello.

Un'applicazione

Definizione. Dato un insieme di enunciati Γ, la *teoria generata* da Γ è $T = \{\sigma \mid T \vdash \sigma\}$. Γ è l'insieme degli *assiomi* di T. Tuttavia, con abuso di linguaggio, si parlerà di *teoria* Γ intendendo la teoria assiomatizzata da Γ.

Una teoria Γ è *inconsistente* se esiste un enunciato φ tale che $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$; altrimenti, Γ è *consistente*.

Teorema. Una teoria Γ è consistente se e solo se ha un modello.

Dimostrazione. $\Rightarrow$: Se Γ non ha modelli, allora $\Gamma \models \varphi \wedge \neg\varphi$;

Un'applicazione

Definizione. Dato un insieme di enunciati Γ, la *teoria generata* da Γ è $T = \{\sigma \mid T \vdash \sigma\}$. Γ è l'insieme degli *assiomi* di T. Tuttavia, con abuso di linguaggio, si parlerà di *teoria* Γ intendendo la teoria assiomatizzata da Γ.

Una teoria Γ è *inconsistente* se esiste un enunciato φ tale che $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$; altrimenti, Γ è *consistente*.

Teorema. Una teoria Γ è consistente se e solo se ha un modello.

Dimostrazione. $\Rightarrow$: Se Γ non ha modelli, allora $\Gamma \models \varphi \wedge \neg\varphi$; per completezza, $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$,

Un'applicazione

Definizione. Dato un insieme di enunciati Γ, la *teoria generata* da Γ è $T = \{\sigma \mid T \vdash \sigma\}$. Γ è l'insieme degli *assiomi* di T. Tuttavia, con abuso di linguaggio, si parlerà di *teoria* Γ intendendo la teoria assiomatizzata da Γ.

Una teoria Γ è *inconsistente* se esiste un enunciato φ tale che $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$; altrimenti, Γ è *consistente*.

Teorema. Una teoria Γ è consistente se e solo se ha un modello.

Dimostrazione. $\Rightarrow$: Se Γ non ha modelli, allora $\Gamma \models \varphi \wedge \neg\varphi$; per completezza, $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, cioè Γ è inconsistente.

Un'applicazione

Definizione. Dato un insieme di enunciati Γ, la *teoria generata* da Γ è $T = \{\sigma \mid T \vdash \sigma\}$. Γ è l'insieme degli *assiomi* di T. Tuttavia, con abuso di linguaggio, si parlerà di *teoria* Γ intendendo la teoria assiomatizzata da Γ.

Una teoria Γ è *inconsistente* se esiste un enunciato φ tale che $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$; altrimenti, Γ è *consistente*.

Teorema. Una teoria Γ è consistente se e solo se ha un modello.

Dimostrazione. $\Rightarrow$: Se Γ non ha modelli, allora $\Gamma \models \varphi \wedge \neg\varphi$; per completezza, $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, cioè Γ è inconsistente.

$\Leftarrow$: Sia $\mathcal{M}$ modello di Γ e φ un enunciato.

Un'applicazione

Definizione. Dato un insieme di enunciati Γ, la *teoria generata* da Γ è $T = \{\sigma \mid T \vdash \sigma\}$. Γ è l'insieme degli *assiomi* di T. Tuttavia, con abuso di linguaggio, si parlerà di *teoria* Γ intendendo la teoria assiomatizzata da Γ.

Una teoria Γ è *inconsistente* se esiste un enunciato φ tale che $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$; altrimenti, Γ è *consistente*.

Teorema. Una teoria Γ è consistente se e solo se ha un modello.

Dimostrazione. $\Rightarrow$: Se Γ non ha modelli, allora $\Gamma \models \varphi \wedge \neg\varphi$; per completezza, $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, cioè Γ è inconsistente.

$\Leftarrow$: Sia $\mathcal{M}$ modello di Γ e φ un enunciato. Allora $\mathcal{M} \models \varphi$ oppure $\mathcal{M} \models \neg\varphi$, ma non entrambi

Un'applicazione

Definizione. Dato un insieme di enunciati Γ, la *teoria generata* da Γ è $T = \{\sigma \mid T \vdash \sigma\}$. Γ è l'insieme degli *assiomi* di T. Tuttavia, con abuso di linguaggio, si parlerà di *teoria* Γ intendendo la teoria assiomatizzata da Γ.

Una teoria Γ è *inconsistente* se esiste un enunciato φ tale che $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$; altrimenti, Γ è *consistente*.

Teorema. Una teoria Γ è consistente se e solo se ha un modello.

Dimostrazione. $\Rightarrow$: Se Γ non ha modelli, allora $\Gamma \models \varphi \wedge \neg\varphi$; per completezza, $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, cioè Γ è inconsistente.

$\Leftarrow$: Sia $\mathcal{M}$ modello di Γ e φ un enunciato. Allora $\mathcal{M} \models \varphi$ oppure $\mathcal{M} \models \neg\varphi$, ma non entrambi , cioè $\mathcal{M} \not\models \varphi \wedge \neg\varphi$,

Un'applicazione

Definizione. Dato un insieme di enunciati Γ, la *teoria generata* da Γ è $T = \{\sigma \mid T \vdash \sigma\}$. Γ è l'insieme degli *assiomi* di T. Tuttavia, con abuso di linguaggio, si parlerà di *teoria* Γ intendendo la teoria assiomatizzata da Γ.

Una teoria Γ è *inconsistente* se esiste un enunciato φ tale che $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$; altrimenti, Γ è *consistente*.

Teorema. Una teoria Γ è consistente se e solo se ha un modello.

Dimostrazione. $\Rightarrow$: Se Γ non ha modelli, allora $\Gamma \models \varphi \wedge \neg\varphi$; per completezza, $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, cioè Γ è inconsistente.

$\Leftarrow$: Sia $\mathcal{M}$ modello di Γ e φ un enunciato. Allora $\mathcal{M} \models \varphi$ oppure $\mathcal{M} \models \neg\varphi$, ma non entrambi , cioè $\mathcal{M} \not\models \varphi \wedge \neg\varphi$, dunque $\Gamma \nvdash \varphi \wedge \neg\varphi$.

Il teorema di incompletezza di Gödel

Teorie complete e incomplete

Definizione. Sia Γ una teoria consistente, in un linguaggio $\mathcal{L}$ fissato.

Teorie complete e incomplete

Definizione. Sia Γ una teoria consistente, in un linguaggio $\mathcal{L}$ fissato.
Γ è *completa* se, per ogni $\mathcal{L}$ enunciato σ, si ha

$$\Gamma \vdash \sigma \text{ oppure } \Gamma \vdash \neg\sigma$$

Teorie complete e incomplete

Definizione. Sia Γ una teoria consistente, in un linguaggio $\mathcal{L}$ fissato.
Γ è *completa* se, per ogni $\mathcal{L}$ enunciato σ, si ha

$$\Gamma \vdash \sigma \text{ oppure } \Gamma \vdash \neg\sigma$$

Altrimenti Γ è *incompleta*.

Teorie complete e incomplete

Definizione. Sia Γ una teoria consistente, in un linguaggio $\mathcal{L}$ fissato. Γ è *completa* se, per ogni $\mathcal{L}$ enunciato σ, si ha

$$\Gamma \vdash \sigma \text{ oppure } \Gamma \vdash \neg\sigma$$

Altrimenti Γ è *incompleta*.

Esempio. Sia $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-struttura. Allora $Th(\mathcal{M}) = \{\sigma \mid \mathcal{M} \models \sigma\}$ è una teoria completa.

Teorie complete e incomplete

Definizione. Sia Γ una teoria consistente, in un linguaggio $\mathcal{L}$ fissato.

Γ è *completa* se, per ogni $\mathcal{L}$ enunciato σ, si ha

$$\Gamma \vdash \sigma \text{ oppure } \Gamma \vdash \neg\sigma$$

Altrimenti Γ è *incompleta*.

Esempio. Sia $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-struttura. Allora $Th(\mathcal{M}) = \{\sigma \mid \mathcal{M} \models \sigma\}$ è una teoria completa.

Infatti, dato un qualunque $\mathcal{L}$-enunciato σ, si ha che esattamente uno tra $\mathcal{M} \models \sigma$ e $\mathcal{M} \models \neg\sigma$ vale.

Teorie complete e incomplete

Viceversa, ogni teoria completa Γ è della forma $Th(\mathcal{M})$ per qualche struttura $\mathcal{M}$,

Teorie complete e incomplete

Viceversa, ogni teoria completa Γ è della forma $Th(\mathcal{M})$ per qualche struttura $\mathcal{M}$, in effetti per ogni $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \models \Gamma$:

Teorie complete e incomplete

Viceversa, ogni teoria completa Γ è della forma $Th(\mathcal{M})$ per qualche struttura $\mathcal{M}$, in effetti per ogni $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \models \Gamma$:

Se Γ è una qualunque teoria e $\mathcal{M} \models \Gamma$, allora $\Gamma \subseteq Th(\mathcal{M})$;

Teorie complete e incomplete

Viceversa, ogni teoria completa Γ è della forma $Th(\mathcal{M})$ per qualche struttura $\mathcal{M}$, in effetti per ogni $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \models \Gamma$:

Se Γ è una qualunque teoria e $\mathcal{M} \models \Gamma$, allora $\Gamma \subseteq Th(\mathcal{M})$;
se Γ è completa, vale anche l'inclusione opposta.

Teorie complete e incomplete

Viceversa, ogni teoria completa Γ è della forma $Th(\mathcal{M})$ per qualche struttura $\mathcal{M}$, in effetti per ogni $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \models \Gamma$:

Se Γ è una qualunque teoria e $\mathcal{M} \models \Gamma$, allora $\Gamma \subseteq Th(\mathcal{M})$;
se Γ è completa, vale anche l'inclusione opposta.

In altre parole, Γ è completa se e solo se è consistente e tutti i suoi modelli sono elementarmente equivalenti, cioè $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$ per ogni $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ modelli di Γ.

Teorie complete e incomplete

Esempio. La teoria dei gruppi Γ è incompleta. Esempi di enunciati indipendenti da Γ:
$\sigma : \forall x, y \; xy = yx$:

Teorie complete e incomplete

Esempio. La teoria dei gruppi Γ è incompleta. Esempi di enunciati indipendenti da Γ:
$\sigma : \forall x, y \; xy = yx$: ci sono gruppi commutativi e gruppi non commutativi

Teorie complete e incomplete

Esempio. La teoria dei gruppi Γ è incompleta. Esempi di enunciati indipendenti da Γ:
$\sigma : \forall x, y \; xy = yx$: ci sono gruppi commutativi e gruppi non commutativi
$\tau : \exists x, y, z \forall w (w = x \vee w = y \vee w = z)$:

Teorie complete e incomplete

Esempio. La teoria dei gruppi Γ è incompleta. Esempi di enunciati indipendenti da Γ:

$\sigma : \forall x, y \; xy = yx$: ci sono gruppi commutativi e gruppi non commutativi

$\tau : \exists x, y, z \forall w (w = x \vee w = y \vee w = z)$: ci sono gruppi con al più tre elementi e gruppi che hanno almeno quattro elementi

Teorie complete e incomplete

Esempio. La teoria dei gruppi Γ è incompleta. Esempi di enunciati indipendenti da Γ:
$\sigma : \forall x, y \; xy = yx$: ci sono gruppi commutativi e gruppi non commutativi
$\tau : \exists x, y, z \forall w (w = x \vee w = y \vee w = z)$: ci sono gruppi con al più tre elementi e gruppi che hanno almeno quattro elementi

Tuttavia ci sono teorie che sembrano essere elaborate appositamente per essere complete, cioè per descrivere tutto ciò che deve valere in un dato ambito.

L'aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano

Sia $\mathcal{L} = \{S, 0\}$, con S simbolo funzionale unario e 0 simbolo di costante.

L'aritmetica di Peano

Sia $\mathcal{L} = \{S, 0\}$, con S simbolo funzionale unario e 0 simbolo di costante.
Sia PA la teoria (assiomatizzata da):

L'aritmetica di Peano

Sia $\mathcal{L} = \{S, 0\}$, con S simbolo funzionale unario e 0 simbolo di costante.
Sia PA la teoria (assiomatizzata da):

- $\neg \exists x \; 0 = Sx$

L'aritmetica di Peano

Sia $\mathcal{L} = \{S, 0\}$, con S simbolo funzionale unario e 0 simbolo di costante.
Sia PA la teoria (assiomatizzata da):

- $\neg \exists x \; 0 = Sx$
- $\forall x, y (Sx = Sy \Rightarrow x = y)$

L'aritmetica di Peano

Sia $\mathcal{L} = \{S, 0\}$, con S simbolo funzionale unario e 0 simbolo di costante.
Sia PA la teoria (assiomatizzata da):

- $\neg\exists x\ 0 = Sx$
- $\forall x, y(Sx = Sy \Rightarrow x = y)$
- (principio d'induzione) per ogni formula φ:
  $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(Sx)) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$

Note:

L'aritmetica di Peano

Sia $\mathcal{L} = \{S, 0\}$, con S simbolo funzionale unario e 0 simbolo di costante. Sia PA la teoria (assiomatizzata da):

- $\neg\exists x\; 0 = Sx$
- $\forall x, y(Sx = Sy \Rightarrow x = y)$
- (principio d'induzione) per ogni formula φ:
  $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(Sx)) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$

Note:

- Si tratta di una lista infinita di assiomi

L'aritmetica di Peano

Sia $\mathcal{L} = \{S, 0\}$, con S simbolo funzionale unario e 0 simbolo di costante.
Sia PA la teoria (assiomatizzata da):

- $\neg\exists x\ 0 = Sx$
- $\forall x, y(Sx = Sy \Rightarrow x = y)$
- (principio d'induzione) per ogni formula φ:
  $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(Sx)) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$

Note:

- Si tratta di una lista infinita di assiomi
- $\mathbb{N} \models PA$

L'aritmetica di Peano

Sia $\mathcal{L} = \{S, 0\}$, con S simbolo funzionale unario e 0 simbolo di costante.
Sia PA la teoria (assiomatizzata da):

- $\neg\exists x\ 0 = Sx$
- $\forall x, y(Sx = Sy \Rightarrow x = y)$
- (principio d'induzione) per ogni formula φ:
  $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(Sx)) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$

Note:

- Si tratta di una lista infinita di assiomi
- $\mathbb{N} \models PA$

In PA si possono definire tutte le usuali operazioni e relazioni aritmetiche.
Si tratta di una teoria pensata per poter dedurre tutti gli enunciati soddisfatti dalla struttura dei numeri naturali

L'aritmetica di Peano

Sia $\mathcal{L} = \{S, 0\}$, con S simbolo funzionale unario e 0 simbolo di costante.
Sia PA la teoria (assiomatizzata da):

- $\neg\exists x\ 0 = Sx$
- $\forall x, y(Sx = Sy \Rightarrow x = y)$
- (principio d'induzione) per ogni formula φ:
  $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(Sx)) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$

Note:

- Si tratta di una lista infinita di assiomi
- $\mathbb{N} \models PA$

In PA si possono definire tutte le usuali operazioni e relazioni aritmetiche.
Si tratta di una teoria pensata per poter dedurre tutti gli enunciati soddisfatti dalla struttura dei numeri naturali (e, probabilmente, per aver $\mathbb{N}$ come unico modello, a meno di isomorphismi).

Incompletezza

Tuttavia

Teorema d'incompletezza. (Gödel)

Incompletezza

Tuttavia

Teorema d'incompletezza. (Gödel)

(Se PA è una teoria consistente, allora) PA è una teoria incompleta.

Incompletezza

Tuttavia

Teorema d'incompletezza. (Gödel)

(Se PA è una teoria consistente, allora) PA è una teoria incompleta.

In realtà il teorema, detto **primo teorema di incompletezza di Gödel** ha una forma ben più forte:

Incompletezza

Tuttavia

Teorema d'incompletezza. (Gödel)

(Se *PA* è una teoria consistente, allora) *PA* è una teoria incompleta.

In realtà il teorema, detto **primo teorema di incompletezza di Gödel** ha una forma ben più forte:

Sia T una teoria consistente tale che:

1. in T sia interpretabile l'aritmetica di Peano *PA*
2. (altra ipotesi tecnica discussa più tardi)

Incompletezza

Tuttavia

Teorema d'incompletezza. (Gödel)

(Se *PA* è una teoria consistente, allora) *PA* è una teoria incompleta.

In realtà il teorema, detto **primo teorema di incompletezza di Gödel** ha una forma ben più forte:

Sia T una teoria consistente tale che:

1. in T sia interpretabile l'aritmetica di Peano *PA*
2. (altra ipotesi tecnica discussa più tardi)

Allora T è incompleta.

Completamenti

Proviamo a completare PA (o una qualunque altra teoria consistente) *a mano*,

Completamenti

Proviamo a completare *PA* (o una qualunque altra teoria consistente) *a mano*, cioè a trovare un'estensione completa di *PA*.

Completamenti

Proviamo a completare *PA* (o una qualunque altra teoria consistente) *a mano*, cioè a trovare un'estensione completa di *PA*.
Sia $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ un'enumerazione degli enunciati di $\mathcal{L}$.

Completamenti

Proviamo a completare *PA* (o una qualunque altra teoria consistente) *a mano*, cioè a trovare un'estensione completa di *PA*.
Sia $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ un'enumerazione degli enunciati di $\mathcal{L}$. Definiamo un'estensione completa T di *PA* della forma $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$,

Completamenti

Proviamo a completare PA (o una qualunque altra teoria consistente) *a mano*, cioè a trovare un'estensione completa di PA.
Sia $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ un'enumerazione degli enunciati di $\mathcal{L}$. Definiamo un'estensione completa T di PA della forma $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$, dove
$T_0 = PA$

Completamenti

Proviamo a completare PA (o una qualunque altra teoria consistente) *a mano*, cioè a trovare un'estensione completa di PA.
Sia $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ un'enumerazione degli enunciati di $\mathcal{L}$. Definiamo un'estensione completa T di PA della forma $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$, dove $T_0 = PA$ e, assumendo definito T_n, si consideri l'enunciato σ_n.

Completamenti

Proviamo a completare *PA* (o una qualunque altra teoria consistente) *a mano*, cioè a trovare un'estensione completa di *PA*.
Sia $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ un'enumerazione degli enunciati di $\mathcal{L}$. Definiamo un'estensione completa T di *PA* della forma $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$, dove $T_0 = PA$ e, assumendo definito T_n, si consideri l'enunciato σ_n.

- se $T_n \vdash \neg\sigma_n$, allora $T_{n+1} = T_n$

Completamenti

Proviamo a completare *PA* (o una qualunque altra teoria consistente) *a mano*, cioè a trovare un'estensione completa di *PA*.
Sia $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ un'enumerazione degli enunciati di $\mathcal{L}$. Definiamo un'estensione completa T di *PA* della forma $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$, dove $T_0 = PA$ e, assumendo definito T_n, si consideri l'enunciato σ_n.

- se $T_n \vdash \neg\sigma_n$, allora $T_{n+1} = T_n$
- se $T_n \nvdash \neg\sigma_n$, allora $T_{n+1} = T_n \cup \{\sigma_n\}$

Completamenti

Proviamo a completare *PA* (o una qualunque altra teoria consistente) *a mano*, cioè a trovare un'estensione completa di *PA*.
Sia $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ un'enumerazione degli enunciati di $\mathcal{L}$. Definiamo un'estensione completa T di *PA* della forma $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$, dove $T_0 = PA$ e, assumendo definito T_n, si consideri l'enunciato σ_n.

- se $T_n \vdash \neg\sigma_n$, allora $T_{n+1} = T_n$
- se $T_n \nvdash \neg\sigma_n$, allora $T_{n+1} = T_n \cup \{\sigma_n\}$

Si osservi che ogni T_n è consistente,

Completamenti

Proviamo a completare *PA* (o una qualunque altra teoria consistente) *a mano*, cioè a trovare un'estensione completa di *PA*.
Sia $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ un'enumerazione degli enunciati di $\mathcal{L}$. Definiamo un'estensione completa T di *PA* della forma $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$, dove $T_0 = PA$ e, assumendo definito T_n, si consideri l'enunciato σ_n.

- se $T_n \vdash \neg\sigma_n$, allora $T_{n+1} = T_n$
- se $T_n \nvdash \neg\sigma_n$, allora $T_{n+1} = T_n \cup \{\sigma_n\}$

Si osservi che ogni T_n è consistente, quindi per il teorema di compattezza anche T è consistente.

Completamenti

Proviamo a completare PA (o una qualunque altra teoria consistente) *a mano*, cioè a trovare un'estensione completa di PA.
Sia $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ un'enumerazione degli enunciati di $\mathcal{L}$. Definiamo un'estensione completa T di PA della forma $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$, dove $T_0 = PA$ e, assumendo definito T_n, si consideri l'enunciato σ_n.

- se $T_n \vdash \neg\sigma_n$, allora $T_{n+1} = T_n$
- se $T_n \nvdash \neg\sigma_n$, allora $T_{n+1} = T_n \cup \{\sigma_n\}$

Si osservi che ogni T_n è consistente, quindi per il teorema di compattezza anche T è consistente.
Inoltre T è completa: ogni enunciato σ è della forma σ_n. Quindi se σ non è stato messo in T_{n+1} è perché $T_n \vdash \neg\sigma$ e quindi $\neg\sigma \in T$.

Completamenti

Abbiamo ottenuto un'estensione completa di PA. Come si concilia questo col teorema di incompletezza?

Completamenti

Abbiamo ottenuto un'estensione completa di PA. Come si concilia questo col teorema di incompletezza?

Sia T una teoria consistente tale che:

1. in T sia interpretabile l'aritmetica di Peano PA
2. T sia *ricorsivamente assiomatizzabile*

Allora T è incompleta.

Completamenti

Abbiamo ottenuto un'estensione completa di PA. Come si concilia questo col teorema di incompletezza?

Sia T una teoria consistente tale che:

1. in T sia interpretabile l'aritmetica di Peano PA
2. T sia *ricorsivamente assiomatizzabile*

Allora T è incompleta.

La seconda ipotesi asserisce che T ammette una lista d'assiomi *ricorsiva*.

Completamenti

Abbiamo ottenuto un'estensione completa di PA. Come si concilia questo col teorema di incompletezza?

Sia T una teoria consistente tale che:

1. in T sia interpretabile l'aritmetica di Peano PA
2. T sia *ricorsivamente assiomatizzabile*

Allora T è incompleta.

La seconda ipotesi asserisce che T ammette una lista d'assiomi *ricorsiva*.

Definizione pratica di *ricorsivo*.

Completamenti

Abbiamo ottenuto un'estensione completa di PA. Come si concilia questo col teorema di incompletezza?

Sia T una teoria consistente tale che:

1. in T sia interpretabile l'aritmetica di Peano PA
2. T sia *ricorsivamente assiomatizzabile*

Allora T è incompleta.

La seconda ipotesi asserisce che T ammette una lista d'assiomi *ricorsiva*.

Definizione pratica di *ricorsivo*. Un insieme è ricorsivo se è possibile programmare un computer in modo che, dato un elemento, il programma riconosca se l'elemento appartiene all'insieme o no.

Completamenti

Abbiamo ottenuto un'estensione completa di PA. Come si concilia questo col teorema di incompletezza?

Sia T una teoria consistente tale che:

1. in T sia interpretabile l'aritmetica di Peano PA
2. T sia *ricorsivamente assiomatizzabile*

Allora T è incompleta.

La seconda ipotesi asserisce che T ammette una lista d'assiomi *ricorsiva*.

Definizione pratica di *ricorsivo*. Un insieme è ricorsivo se è possibile programmare un computer in modo che, dato un elemento, il programma riconosca se l'elemento appartiene all'insieme o no.

Quindi la teoria T costruita prima è un'estensione completa di PA, ma è talmente complessa che non è possibile determinarne in alcun modo *effettivo* una lista d'assiomi.

Un cenno sul secondo teorema di incompletezza

Un cenno sul secondo teorema di incompletezza

Sia T una teoria che soddisfa le due ipotesi del primo teorema di incompletezza.

È allora possibile costruire in T un enunciato $Con(T)$ che esprime la consistenza di T.

Un cenno sul secondo teorema di incompletezza

Sia T una teoria che soddisfa le due ipotesi del primo teorema di incompletezza.

È allora possibile costruire in T un enunciato $Con(T)$ che esprime la consistenza di T.

Secondo teorema di incompletezza. (Gödel). Se T è consistente, allora $T \nvdash Con(T)$.

Un cenno sul secondo teorema di incompletezza

Sia T una teoria che soddisfa le due ipotesi del primo teorema di incompletezza.

È allora possibile costruire in T un enunciato $Con(T)$ che esprime la consistenza di T.

Secondo teorema di incompletezza. (Gödel). Se T è consistente, allora $T \nvdash Con(T)$.

In parole: una teoria consistente (che soddisfi le ipotesi del teorema) non può dimostrare la propria consistenza.

Un cenno sul secondo teorema di incompletezza

Sia T una teoria che soddisfa le due ipotesi del primo teorema di incompletezza.

È allora possibile costruire in T un enunciato $Con(T)$ che esprime la consistenza di T.

Secondo teorema di incompletezza. (Gödel). Se T è consistente, allora $T \nvdash Con(T)$.

In parole: una teoria consistente (che soddisfi le ipotesi del teorema) non può dimostrare la propria consistenza.

Un'altra importante teoria che soddisfa le ipotesi del teorema di Gödel è la teoria degli insiemi ZFC.