L'ipotesi del continuo: conseguenze per la pratica e per i fondamenti della matematica

Alessandro Andretta

Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano"
Università degli Studi di Torino

Accademia delle Scienze, Torino 15 febbraio 2018

Confronto tra insiemi

Dati due insiemi A e B poniamo $A \precsim B$ se c'è una funzione iniettiva $f\colon A \to B$; se f è anche suriettiva diremo che A e B sono **equipotenti**, in simboli $A \asymp B$.

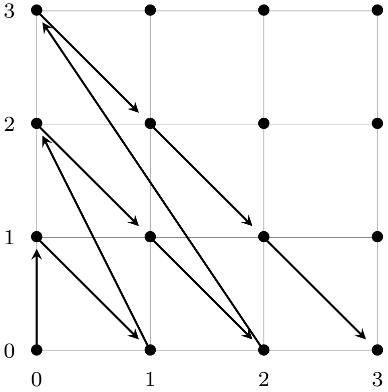
Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

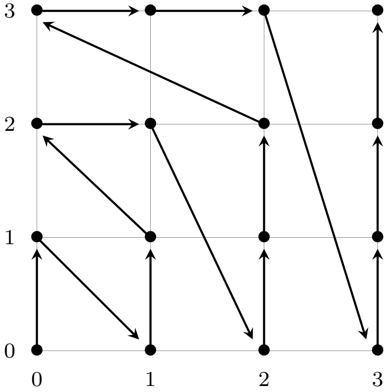
$A \asymp B$ se e solo se $A \precsim B$ e $B \precsim A$.

Esempi

- $\mathbb{N} \asymp \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$; più in generale $\mathbb{N} \asymp X$ per ogni $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito.
- $\mathbb{N} \asymp \mathbb{Z}$, testimoniato da $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $2n \mapsto n$ e $2n + 1 \mapsto -(n + 1)$.
- $\tan\colon (-\pi/2; \pi/2) \to \mathbb{R}$ è una biezione, quindi ogni intervallo $(a; b)$ è in biezione con $\mathbb{R}$.
- $[a; b] \precsim \mathbb{R}$ e per il punto precedente $\mathbb{R} \precsim [a; b]$, quindi $\mathbb{R} \asymp [a; b]$ per Cantor-Schröder-Bernstein. Analogamente per gli intervalli semiaperti di estremi $a < b$.

$\mathbb{N} \asymp \mathbb{N} \times \mathbb{N}$





Enumerazione triangolare

Enumerazione quadrata

$$\boldsymbol{J}(x, y) = \tfrac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + x.$$

Insiemi numerabili

Un insieme si dice **numerabile** se è finito, oppure in biezione con $\mathbb{N}$.

Esempi di insiemi numerabili

- $\mathbb{N}$,
- $\mathbb{Z}$,
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e quindi anche il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili,
- un sottoinsieme di un insieme numerabile,
- $\mathbb{Q}$.

Infatti ogni $q \in \mathbb{Q}$ può essere scritto in un unico modo come n/m con $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e quindi $\mathbb{Q}$ può essere identificato con un sottoinsieme di $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Teorema di Cantor

$\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ è l'**insieme potenza** di A.
$\mathscr{P}(A) \asymp 2^A = \{f \mid f \colon A \to \{0,1\}\}$, $B \mapsto \boldsymbol{\chi}_B$, la funzione caratteristica di B.

Teorema (Cantor)

Per ogni insieme A, non esiste alcuna funzione suriettiva $A \to \mathscr{P}(A)$. In particolare $\mathscr{P}(A) \not\preceq A$.

Dimostrazione.

Se $F \colon A \to \mathscr{P}(A)$, l'insieme $B = \{a \in A \mid a \notin F(a)\}$ non può essere della forma $F(\bar{a})$ per nessun $\bar{a} \in A$. Infatti se $B = F(\bar{a})$ allora $\bar{a} \in B \Leftrightarrow \bar{a} \notin F(\bar{a}) = B$: una contraddizione. $\square$

$\mathscr{P}(\mathbb{N})$ non è numerabile.

$\mathbb{R}$ non è numerabile

$\mathbb{R}$ può essere costruito come l'insieme delle sezioni di Dedekind, cioè l'insieme degli $\emptyset \neq x \subset \mathbb{Q}$ che sono un segmento iniziale di $\mathbb{Q}$ (vale a dire: $q < p \in x \Rightarrow q \in x$) e sono privi di massimo. Ne segue che
$\mathbb{R} \precsim \mathscr{P}(\mathbb{Q}) \asymp \mathscr{P}(\mathbb{N})$.
L'insieme $2^{\mathbb{N}}$ si inietta nell'intervallo $[0;1] \subseteq \mathbb{R}$ mediante la funzione

$$C\colon 2^{\mathbb{N}} \to [0;1], \qquad s \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2s(i)}{3^{i+1}},$$

quindi $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$. Per Cantor-Schröder-Bernstein $\mathbb{R} \asymp \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

$\mathbb{R}$ non è numerabile.

La funzione $\Phi\colon (A^B)^C \to A^{B\times C}$ che ad ogni $F\colon C \to A^B$ associa $\Phi(F)\colon B \times C \to A$ definita da

$$\Phi(F)(b,c) = F(c)(b),$$

è una biezione. Tenendo presente che $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \asymp \mathbb{N}$, si ha che

$$\mathbb{R} \asymp 2^{\mathbb{N}} \asymp 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \asymp \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

In particolare $\mathbb{R} \precsim \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{C} \precsim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, quindi $\mathbb{C}$ è equipotente ad $\mathbb{R}$.

Esempio

L'insieme $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.
Infatti una funzione continua reale di variabile reale è completamente determinata dalla sua restrizione sui razionali, quindi $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \precsim \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ da cui $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \asymp \mathbb{R}$.

Cardinali infiniti

La cardinalità di un insieme X la si denota con $|X|$. Useremo κ, λ per denotare i numeri cardinali. I numeri naturali $0, 1, 2, \ldots$ sono cardinali e $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ è la cardinalità di un insieme infinito e numerabile.

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \quad \ldots \quad \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \quad \ldots$$

in generale: $\aleph_{\alpha+1}$ è il più piccolo cardinale $> \aleph_\alpha$ e se λ è limite $\aleph_\lambda$ è l'estremo superiore degli $\aleph_\alpha$ con $\alpha < \lambda$.
Se X, Y sono insiemi disgiunti di cardinalità κ e λ, allora definiamo $\kappa + \lambda$ come la cardinalità di $X \cup Y$.
Analogamente definiamo $\kappa \cdot \lambda$ come la cardinalità di $X \times Y$.
Le operazioni di **somma** e **prodotto** sui cardinali sono banali: se $\max(\kappa, \lambda) \geq \aleph_0$, allora $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$. Invece l'**esponenziale di cardinali**

$$\kappa^\lambda = |X^Y|$$

è un'operazione non banale.

L'ipotesi del continuo

$\mathbb{R} \asymp \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, quindi $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Ne segue che $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$ e più in generale $2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}$.

Ipotesi del continuo CH (Cantor)

Ogni sottoinsieme infinito di $\mathbb{R}$ o numerabile oppure è in biezione con $\mathbb{R}$. In altre parole: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Poiché $\mathbb{R} \asymp \mathscr{P}(\omega)$, possiamo generalizzare questa congettura:

Ipotesi generalizzata del continuo GCH (Hausdorff)

Sia X infinito. Per ogni $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ o $|\mathcal{A}| \leq |X|$ oppure $|\mathcal{A}| = |\mathscr{P}(X)|$. In altre parole: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Per i risultati di Gödel (1938) e Cohen (1963) né CH né GCH sono dimostrabili o refutabili in ZFC, la teoria Zermelo-Frænkel con l'Assioma di Scelta.

La funzione $\beth$

La funzione $\beth$ è definita da $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$ e $\beth_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha$.

Esempi

- Gli insiemi infiniti numerabili hanno cardinalità $\beth_0 = \aleph_0$.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, la famiglia dei Boreliani di $\mathbb{R}$, gli spazi di Banach separabili, ... hanno cardinalità $\beth_1 = 2^{\beth_0} = 2^{\aleph_0}$.
- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, la famiglia degli insiemi Lebesgue misurabili, $\beta\mathbb{N}$ la compattificazione di Stone-Čhech dei naturali, ... hanno cardinalità $\beth_2 = 2^{\beth_1} = 2^{2^{\aleph_0}}$.

In un certo senso, $\beth_\alpha$ è un concetto più naturale di $\aleph_\alpha$.

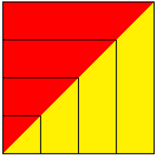
CH $\Leftrightarrow \beth_1 = \aleph_1$ GCH $\Leftrightarrow \forall\alpha(\beth_\alpha = \aleph_\alpha)$

Una caratterizzazione degli $\aleph$

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$.
Una **retta di X^n di direzione** $\mathbf{e}_i$ con $1 \leq i \leq n$ è un insieme della forma $\{(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \mid x \in X\}$ con $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in X$ sono fissati.

Teorema (Kuratowski 1951)

- $|X| \leq \aleph_0$
  $\Leftrightarrow \exists A_1, A_2 \big[X^2 = A_1 \cup A_2$ *e ogni retta di direzione* $\mathbf{e}_i$ *interseca* A_i *in un insieme finito, cioè di cardinalità* $< \aleph_0\big]$.



Teorema (Kuratowski 1951)

- $|X| \leq \aleph_0$
  $\Leftrightarrow \exists A_1, A_2 \big[X^2 = A_1 \cup A_2$ *e ogni retta di direzione* $\mathbf{e}_i$ *interseca* A_i *in un insieme finito, cioè di cardinalità* $< \aleph_0 \big]$,
- $|X| \leq \aleph_1$
  $\Leftrightarrow \exists A_1, A_2 \big[X^2 = A_1 \cup A_2$ *e ogni retta di direzione* $\mathbf{e}_i$ *interseca* A_i *in un insieme numerabile, cioè di cardinalità* $< \aleph_1 \big]$,
  $\Leftrightarrow \exists A_1, A_2, A_3 \big[X^3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ *e ogni retta di direzione* $\mathbf{e}_i$ *interseca* A_i *in un insieme di cardinalità* $< \aleph_0 \big]$,
- $|X| \leq \aleph_2$
  $\Leftrightarrow \exists A_1, A_2 \big[X^2 = A_1 \cup A_2$ *e ogni retta di direzione* $\mathbf{e}_i$ *interseca* A_i *in un insieme di cardinalità* $\leq \aleph_1$*, cioè di cardinalità* $< \aleph_2 \big]$,
  $\Leftrightarrow \exists A_1, A_2, A_3 \big[X^3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ *e ogni retta di direzione* $\mathbf{e}_i$ *interseca* A_i *in un insieme di cardinalità* $< \aleph_1 \big]$,
  $\Leftrightarrow \exists A_1, A_2, A_3, A_4 \big[X^4 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ *e ogni retta di direzione* $\mathbf{e}_i$ *interseca* A_i *in un insieme di cardinalità* $< \aleph_0 \big]$,
- *eccetera.*

Una domanda

Ci sono enunciati matematici equivalenti a CH?

Spazi euclidei

Teorema

CH
$\Leftrightarrow \exists A_1, A_2 \big[\mathbb{R}^2 = A_1 \cup A_2$ *tali che ogni retta orizzontale interseca* A_1 *in un insieme numerabile e ogni retta verticale interseca* A_2 *in un insieme numerabile*$\big]$ *(Sierpiński 1919)*
$\Leftrightarrow \exists A_1, A_2, A_3 \big[\mathbb{R}^3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ *tale che ogni retta parallela al vettore* $\mathbf{e}_i$ *ha intersezione finita con* A_i $(i = 1, 2, 3)\big]$ *(Sierpiński 1951)*

Teorema

$2^{\aleph_0} \leq \aleph_n$ *se e solo se* $\exists A_1, \ldots, A_{n+2} \big[A_1 \cup \cdots \cup A_{n+2} = \mathbb{R}^{n+2}$ *tale che ogni retta parallela a* $\mathbf{e}_i$ *ha intersezione finita con* $A_i\big]$.
Più in generale, per ogni $k \leq n$, $2^{\aleph_0} \leq \aleph_n$ *è equivalente all'esistenza di un ricoprimento* $A_1 \cup \cdots \cup A_{n+2-k} = \mathbb{R}^{n+2-k}$ *tale che ogni retta parallela a* $\mathbf{e}_i$ *interseca* A_i *in un insieme di taglia* $< \aleph_k$.

Spazi euclidei

In particolare sono equivalenti:

- l'esistenza di un ricoprimento $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \mathbb{R}^4$ tale che ogni retta parallela a $\mathbf{e}_i$ interseca A_i in un insieme finito, cioè di taglia $< \aleph_0$,
- l'esistenza di un ricoprimento $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \mathbb{R}^3$ tale che ogni retta parallela a $\mathbf{e}_i$ interseca A_i in un insieme numerabile, cioè di taglia $< \aleph_1$,
- l'esistenza di un ricoprimento $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}^2$ tale che ogni retta parallela a $\mathbf{e}_i$ interseca A_i in un insieme di taglia $< \aleph_2$,
- il fatto che $\mathbb{R}$ sia di taglia $< \aleph_3$, cioè di taglia $\leq \aleph_2$.

Spazi euclidei

Teorema (Bagemihl 1961 $n = 1$, Davies 1963 $n \geq 2$)

$2^{\aleph_0} \leq \aleph_n$ se e solo se c'è un ricoprimento $A_0 \cup \cdots \cup A_{n+2} = \mathbb{R}^2$ e ci sono $0 \leq \theta_0 < \cdots < \theta_{n+2} < \pi$ tali che ogni retta di direzione θ_i ha intersezione finita con A_i.

I risultati precedenti sono stati generalizzati considerando partizioni/ricoprimenti della varietà Grassmaniana affine $\mathrm{Graff}_1(\mathbb{R}^k)$, cioè l'insieme delle rette di $\mathbb{R}^k$, e anche oggetti geometrici più complessi (Erdős-Jackson-Mauldin, 1994).

Spazi euclidei

Teorema (Erdős 1943 $k = 1$, Davies 1972 $k = 2$, Kunen 1987 $k \geq 3$)

Per ogni $k \geq 1$, CH *vale se e solo se c'è una partizione* $\{D_n \mid n \in \omega\}$ *di* $\mathbb{R}^k$ *tale che per ogni* $n \in \omega$ *l'insieme* D_n *ha distanze diverse, vale a dire: per ogni* $P_0, P_1, P_2, P_3 \in D_n$

$$0 \neq d(P_0, P_1) = d(P_2, P_3) \Rightarrow \{P_0, P_1\} = \{P_2, P_3\}$$

dove d *è la metrica usuale di* $\mathbb{R}^k$. *Equivalentemente: se i punti* P_i *sono distinti* $\{d(P_i, P_j) \mid 0 \leq i < j \leq 3\}$ *ha taglia* 6.

Spazi euclidei

Una **nuvola di centro** $C \in \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che ha intersezione finita con ogni retta passante per C; uno **spray di centro** C è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che ha intersezione finita con ogni circonferenza di centro C. $\mathbb{R}^2$ non può essere ricoperto da due nuvole o da due spray.

Teorema

- CH *se e solo se* $\mathbb{R}^2$ *è ricoperto da tre nuvole; inoltre queste tre nuvole possono essere prese con centri* $(0,0)$, $(0,1)$ *e* $(1,0)$ (Komjáth 2001).
- $2^{\aleph_0} \leq \aleph_n$ *se e solo se* $\mathbb{R}^2$ *è ricoperto* $n+2$ *nuvole* (Komjáth 2001 e Schmerl 2003).
- $\mathbb{R}^2$ *è ricoperto da tre spray i cui centri non sono allineati* (Schmerl 2010)
- CH *se e solo se* $\mathbb{R}^2$ *è ricoperto da tre spray i cui centri sono allineati* (de la Vega 2009).

Analisi complessa.

Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni intere e $z \in \mathbb{C}$ definiamo $\mathcal{F}_z \stackrel{\text{def}}{=} \{f(z) \mid f \in \mathcal{F}\}$. Chiaramente, se $\mathcal{F}$ è numerabile, allora anche $\mathcal{F}_z$ lo è.

Teorema (Erdős, 1964)

$\neg$CH *vale se e solo se per ogni* $\mathcal{F}$, *se* $\mathcal{F}_z$ *è numerabile, per qualsiasi* $z \in \mathbb{C}$, *allora* $\mathcal{F}$ *è numerabile.*

$\mathcal{F}$ è κ-**piccola** se $|\mathcal{F}_z| < \kappa$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Lemma

Se $\kappa < 2^{\aleph_0}$ *e* $\mathcal{F}$ *è* κ*-piccola, allora* $|\mathcal{F}| < \kappa$.

Corollario

Se $\mathcal{F}_z$ *è finito per ogni* $z \in \mathbb{C}$, *allora* $\mathcal{F}$ *è finita e quindi c'è un numero* n *tale che* $|\mathcal{F}_z| \leq n$ *per ogni* z.

Analisi complessa

Quindi se vale CH, allora c'è una $\mathcal{F}$ di taglia $2^{\aleph_0}$ che è $2^{\aleph_0}$-piccola ed Erdős chiese se questa implicazione potesse essere invertita.

Teorema (Kumar-Shelah 2017)

È coerente con ZFC *che esista una famiglia $\mathcal{F}$ di taglia $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ che sia $2^{\aleph_0}$-piccola.*

In quel modello il continuo è piuttosto grande $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$ e non è noto se una risposta negativa al problema di Erdős si possa ottenere quando il continuo è più piccolo, per esempio quando $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Analisi reale

Teorema (Davies, 1974)

CH *è equivalente a ciascuno dei seguenti enunciati:*

1. *Per ogni* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *ci sono* $g_n, h_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tali che per ogni* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *l'insieme* $\{n \in \omega \mid g_n(x) \cdot h_n(y) \neq 0\}$ *è finito e* $f(x, y) = \sum_n g_n(x) \cdot h_n(y)$.
2. *Come sopra, ma con* $f(x, y) = \mathrm{e}^{x \cdot y}$.

Teorema (Morayne 1987)

Per ogni $k \geq 1$, CH *è equivalente all'esistenza di una suriezione* $(f_1, \dots, f_k, f_{k+1})\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{k+1}$, *dove* $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $1 \leq i \leq k+1$, *tale che per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *almeno una delle* f_i *è derivabile in* x.
In particolare, CH $\Leftrightarrow \exists (f_1, f_2)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *suriettiva tale che o* $f_1'(x)$ *esiste o* $f_2'(x)$ *esiste per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

Aspetti fondazionali

Teorema (Gödel 1938)

GCH *non è refutabile a partire da* ZFC, *cioè* $\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC} + \mathsf{GCH})$.

Teorema (Cohen 1963)

CH *(e quindi a maggior ragione* GCH*) non è dimostrabile a partire da* ZFC*:* $\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_2)$.

La funzione esponenziale $\kappa \mapsto 2^\kappa$ è uno degli argomenti più studiati in teoria degli insiemi.

Ci sono prospettive per decidere CH, cioè per decidere quanti sono i numeri reali?

Scenari possibili

Considerato che il metodo del *forcing* ci consente di violare o di verificare l'ipotesi (generalizzata) del continuo a nostro piacimento, si prospettano due possibilità:

Possibilità 1 CH e quindi GCH non saranno mai decisi ed i vari modelli che gli insiemisti hanno prodotto e continuano a produrre sono l'analogo della pletora di modelli che si studiano nelle varie discipline.

Possibilità 2 troveremo dei nuovi assiomi della teoria degli insiemi che decideranno il problema del continuo.

Quali assiomi?

Nuovi assiomi

Gödel 1947

There might exist axioms so abundant in their verifiable consequences, shedding so much light upon a whole discipline, and furnishing such powerful methods for solving given problems (and even solving them, as far as that is possible, in a constructivistic way) that quite irrespective of their intrinsic necessity they would have to be assumed at least in the same sense as any well established physical theory.

Gödel sembrava propenso a credere che $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Cohen 1966

A point of view which the author feels may eventually come to be accepted is that CH is obviously false. The main reason one accepts the axiom of infinity is probably that we feel it absurd to think that the process of adding only one set at a time can exhaust the entire universe. Similarly with the higher axioms of infinity. Now $\aleph_1$ is the cardinality of the set of countable ordinals, and this is merely a special and the simplest way of generating a higher cardinal. The set $2^{\aleph_0}$ is, in contrast, generated by a totally new and more powerful principle, namely the power set axiom. It is unreasonable to expect that any description of a larger cardinal which attempts to build up that cardinal from ideas deriving from the replacement axiom can ever reach $2^{\aleph_0}$.
Thus $2^{\aleph_0}$ is greater than $\aleph_n$, $\aleph_\omega$, $\aleph_a$, where $a = \aleph_\omega$, etc. This point of view regards $2^{\aleph_0}$ as an incredibly rich set given to us by one bold new axiom, which can never be approached by any piecemeal process of construction. Perhaps later generations will see the problem more clearly and express themselves more eloquently.

Woodin: la prima fase (1995–2005) Ω-*logic*

L'universo degli insiemi è stratificato

$$\mathrm{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} \mathrm{V}_\alpha = \bigcup_{\kappa \in \mathrm{Card}} \mathrm{H}_\kappa$$

$\mathrm{V}_\alpha = \{x \mid \mathrm{rank}(x) < \alpha\}$ è la gerarchia di von Neumann, e
$\mathrm{H}_\kappa = \{x \mid |\mathrm{TC}(x)| < \kappa\}$ e $\mathrm{TC}(x) = x \cup \bigcup x \cup \bigcup\bigcup x \cup \bigcup\bigcup\bigcup x \cup \dots$
H_ω e H_{ω_1} sono la famiglia degli insiemi ereditariamente finiti e ereditariamente numerabili, rispettivamente.
$\langle \mathrm{H}_\omega, \in\rangle$ è equivalente a $\langle \mathbb{N}, +, \times\rangle$ ed è adeguatamente assiomatizzata dall'aritmetica di Peano PA.
$\langle \mathrm{H}_{\omega_1}, \in\rangle$ è equivalente a $\langle \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \times, \in\rangle$ ed è adeguatamente assiomatizzata dall'aritmetica del second'ordine con l'aggiunta dell'assioma di determinatezza proiettiva PD

Woodin: la prima fase (1995–2005) Ω-*logic*

Woodin ha individuato la corretta assiomatizzazione per $\langle \mathrm{H}_{\omega_2}, \in \rangle$ assumendo grandi cardinali: è una teoria invariante per *forcing* e implica che $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Per fare questo Woodin ha individuato un'estensione della logica del prim'ordine, la Ω-*logic*, in cui si definisce una nuova nozione di derivazione $\vdash_\Omega$ e una nuova relazione di soddisfazione $\models_\Omega$ che sono invarianti per *forcing*.

Questi risultati si trovano nel libro *The axiom of determinacy, forcing axioms, and the nonstationary ideal* De Gruyter 1999, 934 pagine

Woodin: la seconda fase (2010–2018) *Ultimate*-L

W.H. Woodin ha sviluppato un formidabile apparato matematico al fine di realizzare un ambizioso programma che, se coronato dal successo, fornirebbe una chiara indicazione sulla verità di CH e GCH.
Il punto di partenza è un risultato di dicotomia che asserisce che al di sopra di un cardinale *extendible*, la classe degli insiemi ereditariamente definibili a partire dagli ordinali HOD è molto simile a V oppure è molto differente da V. L'obbiettivo di Woodin è dimostrare che la seconda possibilità non può avvenire e nel contempo dimostrare che HOD deve essere simile ad L, l'universo costruito da Gödel, da cui *Ultimate*-L.

- *Suitable extender models I*, J. of Math. Logic 2010, p. 101–339
- *Suitable extender models II*, J. of Math. Logic 2011, p. 115–436
- *In search of Ultimate*-L, Bull. of Symb. Logic 2017, p. 1–109
- *Fine structure at the finite levels of supercompactness*, 710 pagine
- *The Ultimate*-L *conjecture*, 419 pagine

Osservazioni finali

Faccio mie le seguenti osservazioni di Woodin:

Woodin 2001

So, is the Continuum Hypothesis solvable? Perhaps I am not completely confident the "solution" I have sketched is the solution, but it is for me convincing evidence that there is a solution. Thus, I now believe the Continuum Hypothesis is solvable, which is a fundamental change in my view of set theory.

...

The universe of sets is a large place. We have just barely begun to understand it.

Il punto di partenza di tutto questo è nel lavoro di Georg Cantor.

Grazie per l'attenzione!